

INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO



Fundação Cuidar o Futuro

Fundação Cuidar o Futuro
Nº 2571

..... EDIÇÃO

..... da

ASSOCIAÇÃO DOS ESTUDANTES

Fundação Cuidar o Futuro

Trabalha agora, neste mesmo dever,
como se ele te abrisse as portas do Céu.
Pensa que nada remediarás depois quan-
do lamentares não teres cumprido na
hora precisa.

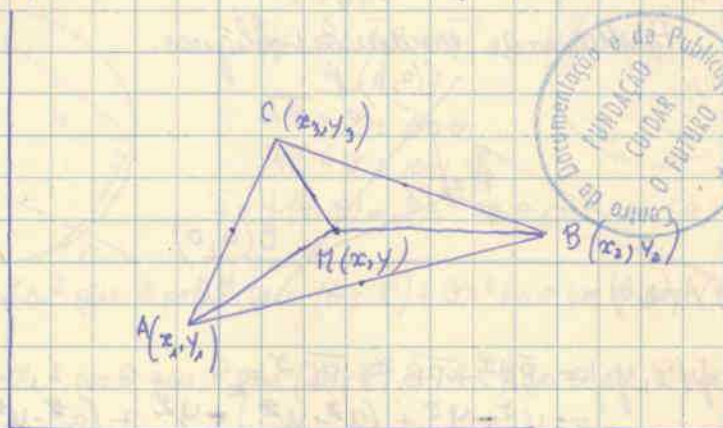
Estuda sempre: ainda que custe, quan-
do custa e... porque custa.



Fundação Cuidar o Futuro

Problemas de máximos e mínimos:

1 - Nave plana refúgio... etc.. (n.º 93 - cad. II - M.B.)



$$f(x, y) = \overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 + \overline{MC}^2 =$$

$$= (x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (x-x_2)^2 + (y-y_2)^2 + (x-x_3)^2 + (y-y_3)^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2(x-x_1) + 2(x-x_2) + 2(x-x_3) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2(y-y_1) + 2(y-y_2) + 2(y-y_3) = 0$$

$$x - x_1 + x - x_2 + x - x_3 = 0$$

$$3x = x_1 + x_2 + x_3$$

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$$

$$y - y_1 + y - y_2 + y - y_3 = 0$$

$$3y = y_1 + y_2 + y_3$$

$$y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$$

x e y são as coordenadas do ponto de encontro de c.f.p.

$$s = 0$$

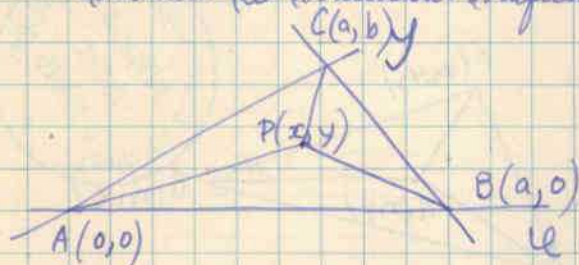
$$p = 0$$

$$t = 6$$

$$s^2 - at = -36 < 0 ; s, t > 0 \rightarrow \text{m c.f.p.}$$

2 - Dados A, B, C não em linha reta det. P de $\pi \equiv ABC$ tal que a soma dos quadrados das distâncias de P a A, B, C seja mínima.

Escolhem-se coordenadas oblíquas.



$$f(x, y) = \overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 =$$

$$= x^2 + y^2 + (a-x)^2 + y^2 + (a-x)^2 + (b-y)^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2x + 2(a-x) + 2(a-x) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2y - 2y + 2(b-y) = 0$$

$$-2x + 4a - 2x = 0$$

$$-6x = -4a$$

$$x = \frac{2}{3}a$$

$$-4y + 2b - 2y = 0$$

$$-6y + 2b = 0$$

$$y = \frac{1}{3}b$$

$$r = -2 - 2 - 2 = -6$$

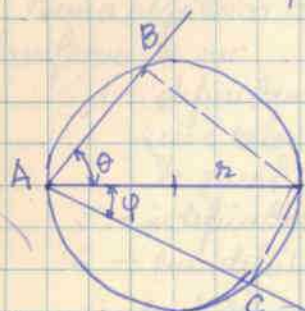
$$s = 0$$

$$t = -6$$

$$s^2 - rt = -36 < 0 \rightarrow r, t < 0 \rightarrow M$$

7

3- Determinar o triângulo inscrito num círculo dado, que tenha área máxima.



$$\hat{A} = \theta + \varphi$$

$$S = \frac{1}{2} \overline{AB} \times \overline{AC} \quad \text{em } (\theta + \varphi)$$

$$\overline{AB} = 2r \cos \theta$$

$$\overline{AC} = 2r \cos \varphi$$

$$S = f(\theta, \varphi) = 2r^2 \cos \theta \cos \varphi \quad \text{em } (\theta + \varphi)$$



$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial \theta} = -2r^2 \sin \theta \cos \varphi \quad \text{em } (\theta + \varphi) + 2r^2 \cos \theta \cos \varphi \cos (\theta + \varphi) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial \varphi} = -2r^2 \cos \theta \sin \varphi \quad \text{em } (\theta + \varphi) + 2r^2 \cos \theta \cos \varphi \cos (\theta + \varphi) = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2r^2 \cos \varphi [-\sin \theta \cos (\theta + \varphi) + \cos \theta \cos (\theta + \varphi)] = 0 \\ 2r^2 \cos \theta [-\sin \varphi \cos (\theta + \varphi) + \cos \varphi \cos (\theta + \varphi)] = 0 \end{array} \right.$$

$$2r^2 \cos \varphi \cos (\theta + \theta - \varphi) = 2r^2 \cos \varphi \cos (2\theta - \varphi) = 0$$

$$2r^2 \cos \theta \cos (\theta - \varphi - \varphi) = 2r^2 \cos \theta \cos (\theta - 2\varphi) = 0$$

$$2r^2 \cos \varphi \cos (\theta + \theta + \varphi) = 2r^2 \cos \varphi \cos (2\theta + \varphi) = 0$$

$$2r^2 \cos \theta \cos (\varphi + \theta + \varphi) = 2r^2 \cos \theta \cos (\theta + 2\varphi) = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos (2\theta + \varphi) = 0 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2\theta + \varphi = 90 \\ \varphi = 90 - 2\theta \end{array} \right. \\ \cos (\theta + 2\varphi) = 0 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \theta + 2\varphi = 90 \\ \theta + 180 - 4\theta = 90 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$-3\theta = -90 \rightarrow \theta = 30^\circ$$

$$\varphi = 30^\circ$$

$$h = \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} = -2r^2 \cos \varphi \cos (2\theta + \varphi) \neq$$

$$s = \frac{\partial^2 f}{\partial \theta \partial \varphi} = -2r^2 \sin \varphi \cos (2\theta + \varphi) - 2r^2 \cos \varphi \sin (2\theta + \varphi)$$

$$t = \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} = -2r^2 \cos \theta \cos (\theta + 2\varphi)$$

$$s^2 - 4t = 9r^4 < 0; \quad r, t \neq 0 \rightarrow \underline{\underline{M}}$$

4 - De todos os paralelepípedos retângulos de superfície lateral dada, determinar o de volume máximo.

$$f(x, y, z) = xyz = V$$

$$\varphi(x, y, z) = xy + yz + xz = a$$

$$\frac{\partial(f, \varphi)}{\partial(z, x)} = \begin{vmatrix} xy & yz \\ y+x & y+z \end{vmatrix} = 0$$

$$\frac{\partial(f, \varphi)}{\partial(z, y)} = \begin{vmatrix} xy & xz \\ y+x & x+z \end{vmatrix} = 0$$

$$xyz + xyx - yxz - xyx = 0$$

$$xyz + xyx - yxz - \cancel{xyz} = 0$$

$$\begin{cases} yx(x-z) = 0 \\ xz(y-z) = 0 \\ xy + yz + xz = a \end{cases}$$

Fundação Cuidar o Futuro

Teoria dos máximos e mínimos:

Forma algébrica de grau p é um polinômio homogêneo de grau p .
Classificam-se em:

- 1 - definidas se têm sempre o mesmo sinal qualquer que seja o valor da variável $\rightarrow$ são def. + se tiver sempre o sinal + e def. - se tiver sempre o sinal -.
- 2 - indefinidas se não têm sempre o mesmo sinal.
- 3 - semidefinidas se são nulas para certos valores de x e + ou - para outros.

Máximos e mínimos condicionados ou ligados:

1) Seja $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$
e sup. que $x_1, x_2, \dots, x_n$ (não são independentes entre si)

$$2) \begin{cases} \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ \varphi_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

Seja $k < n$.

3) $(x_1, x_2, \dots, x_{k+1}, \dots, x_n)$
que substituímos em z de:

$$4) f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \varphi(x_{k+1}, \dots, x_n)$$

problema que sabemos resolver:

$$5) \begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial x_{k+1}} = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} = 0 \end{cases}$$

Atendendo a 4) e 5), temos então as equações:

Derivamos em ordem a φ_{k+1} :

$$6) \begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial x_{k+1}} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial x_{k+1}} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial x_{k+1}} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_{k+1}} = 0 \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial x_{k+1}} + \dots + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_{k+1}} = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial x_{k+1}} + \dots + \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_{k+1}} = 0 \end{cases}$$

$$7) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial (f, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k)}{\partial (u_1, u_2, \dots, u_k, u_{k+1})} = 0 \\ - \frac{\partial (f, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k)}{\partial (u_1, u_2, \dots, u_k, u_{k+1})} = 0 \end{array} \right.$$

2) e 7) resolvem completamente o problema.

Fundação Cuidar o Futuro

5° - Analise os eixos de uma cônica, Ox e Oy a que equações referida ao centro.

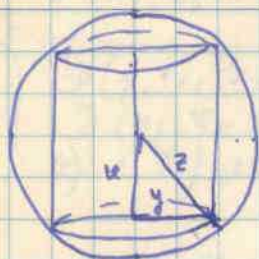
$$f(u, y) = u^2 + y^2$$

$$g(u, y) = au^2 + 2bxy + cy^2 + d = 0$$



Fundação Cuidar o Futuro

6- Encontre uma esfera que cilindro de volume máximo.



$$\begin{cases} V = \pi y^2 \times 2u = 2\pi u y^2 = f(u, y) \\ g(u, y) = u^2 + y^2 = r^2 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial V}{\partial u} & \frac{\partial V}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2\pi y^2 & 4\pi u y \\ 2u & 2y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4\pi y^3 - 8\pi u y & - \\ 4\pi y(y^2 - 2u^2) & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$u^2 + y^2 = r^2$$

$$y^2 = r^2 - u^2$$

$$4\pi u^2 = r^2 - y^2$$

$$4\pi y(y^2 - 2r^2 + 2y^2) = 0$$

$$4\pi y(y^2 - 2r^2) = 0$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ u = r^2 \end{cases}$$

$$u = r^2$$

$$3y^2 - 2r^2 = 0$$

$$y^2 = \frac{2}{3} r^2$$

$$y = r \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$u = \sqrt{r^2 - \frac{2}{3} r^2} = \sqrt{\frac{1}{3} r^2} = r \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{r}{\sqrt{3}}$$

Integrais duplos:

1- Calcular no domínio limitado pelo eixo xy e pelo arco AB da parábola $yz = 4(1-x)$, situada na região com x e y positivos, o integral:

$$I = \iint_D (xz + yz) \, dx \, dy$$

$$\begin{cases} yz = 4(1-x) \\ x=0 \text{ (ou)} \\ yz = 4(1-x) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} yz = 4 \rightarrow y = \frac{4}{z} \\ x=0 \\ yz = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} y = 2\sqrt{1-x} \\ yz = -2\sqrt{1-x} \end{cases}$$



$$\begin{aligned} I &= \int_{-2}^{+2} dy \int_0^{1-\frac{yz}{4}} (xz + yz) \, dx = \int_{-2}^{+2} dy \left[\frac{x^2}{2} + yxz \right]_{x=0}^{x=1-\frac{yz}{4}} \\ &= \int_{-2}^{+2} dy \left[\frac{1}{2} + \frac{yz}{2} - \frac{y^2 z^2}{8} + yz - \frac{y^2 z}{4} \right] = \\ &= \int_{-2}^{+2} dy \left[\frac{1}{2} + \frac{yz}{2} - \frac{3y^2 z}{8} + yz \right] = \\ &= \left[y \right]_{-2}^{+2} + \left[\frac{y^2 z}{2} \right]_{-2}^{+2} - \left[\frac{y^3 z}{4} \right]_{-2}^{+2} + \left[\frac{y^2 z}{2} \right]_{-2}^{+2} = \\ &= 2 + 2 + \frac{128}{1344} + \frac{128}{1344} - \frac{3 \times 32}{64} - \frac{3 \times 32}{64} + \frac{8}{4} + \frac{8}{4} = \\ &= \frac{10752 + 256}{1344} - \frac{192}{64} = \frac{11008}{1344} - \frac{192}{64} = \frac{11008 - 4032}{1344} = \\ &= \frac{6976}{1344} = \frac{3488}{672} = \frac{1744}{336} = \frac{872}{168} = \frac{436}{84} = \\ &= \frac{218}{42} = 5 \frac{8}{42} = 5 \frac{4}{21} \end{aligned}$$

1) Calcular o mesmo integral em coordenadas polares.

$$I = \iint_D (x^2 + y^2) \, dx \, dy = \iint_D r^2 \cdot r \, dr \, d\theta$$

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \rightarrow |J| = r$$



$$\begin{aligned} y^2 &= 4(1-x) \rightarrow y^2 + x^2 = 4 - 4x + x^2 \\ r^2 \sin^2 \theta &= 4(1 - r \cos \theta) \quad \vee \quad r^2 = (4 - r \cos \theta)^2 \\ &= (r \cos \theta - 4)^2 \\ &\rightarrow r = \pm (r \cos \theta - 4) \end{aligned}$$

para $\theta = 0 \rightarrow r = 1 \rightarrow r = \pm (1 - 4)$
logo devemos tomar o sinal (-).

$$r + r \cos \theta = 4$$

$$r = \frac{4}{1 + \cos \theta}$$

$\rightarrow$ equação da parábola em coordenadas polares.

$$I = \iint_D r^2 \, dr \, d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{\frac{4}{1+\cos \theta}}^{\frac{2}{1-\cos \theta}} r^2 \, dr = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^3}{3} \right]_{\frac{4}{1+\cos \theta}}^{\frac{2}{1-\cos \theta}} d\theta$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4 \frac{d\theta}{(1 + \cos \theta)^4}$$

Faz-se $t = \frac{\theta}{2}$

8) - Calcular $I = \iint_D \frac{dx dy}{(x^2 + y^2 + 1)^2}$ estendido a todo o plano.



$$I = \iint_D \frac{r dr d\theta}{(r^2 + 1)^2} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} \frac{r dr}{(r^2 + 1)^2} =$$

Para conter todo o plano
o raio de 0 a 2π e
o ângulo de 0 a ∞ .

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} r (1 + r^2)^{-2} dr d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \left[-\frac{1}{(1 + r^2)} \right]_0^{\infty} =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{1}{2} [\theta]_0^{2\pi} = \boxed{\pi}$$

9) - Calcular o integral $I = \iint_D \frac{dx dy}{(x^2 + y^2 + a^2)^2}$ estendido ao 1.º quadrante.

$$I = \iint_D \frac{r dr d\theta}{(r^2 + a^2)^2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\infty} \frac{r dr}{(r^2 + a^2)^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \left[-\frac{1}{(r^2 + a^2)} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{2a^2} \left[\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2a^2} \cdot \frac{\pi}{2} = \boxed{\frac{\pi}{4a^2}}$$



Fundação Cuidar o Futuro

10) - Calcular $I = \iint_A (x^2 + 2y^2) dx dy$ onde A a área do círculo de centro na origem e de raio igual a 2.

$$x^2 + y^2 = 4$$



$$I = \iint_A (r^2 \cos^2 \theta + 2r^2 \sin^2 \theta) r dr d\theta =$$

$$= \iint_A r^3 (1 + \sin^2 \theta) dr d\theta =$$

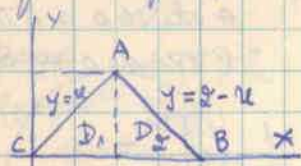
$$= \int_0^{2\pi} (1 + \sin^2 \theta) d\theta \int_0^2 r^3 dr = 4 \int_0^{2\pi} (1 + \sin^2 \theta) d\theta =$$

$$= 4 \left[\theta + \frac{1}{2} (\theta - \sin \theta \cos \theta) \right]_0^{2\pi} = \boxed{12\pi}$$

11) - Calcular $I = \iint_D (y^2 + 2xy + x^2) \, du \, dy$ em relação à área Δ

Δ que tem por vértices os pontos

$$\begin{cases} A(1,1) \\ B(2,0) \\ C(0,0) \end{cases}$$



$$I = \underbrace{\iint_{D_1} (u+y)^2 \, du \, dy}_{I_1} + \underbrace{\iint_{D_2} (u+y)^2 \, du \, dy}_{I_2}$$

$$I_1 = \int_0^1 du \int_0^u (u+y)^2 \, dy = \int_0^1 du \left[\frac{(u+y)^3}{3} \right]_0^u = \frac{1}{3} \int_0^1 [2^3 u^3 - u^3] \, du =$$

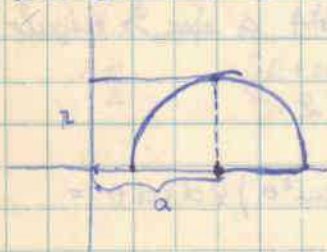
$$= \frac{7}{3} \int_0^1 u^3 \, du = \frac{7}{12}$$

$$I_2 = \int_1^2 du \int_0^{2-u} (u+y)^2 \, dy = \frac{17}{12}$$

$$I = 2$$

12) - Calcular $I = \iint_D \frac{u^2 - y^2}{u^2 + y^2} \, du \, dy$ entendido à parte a 1ª qua-

drante limitada pelo eixo u e pelo círculo de centro $(3,0)$ e de raio r com $a > r$.



$$u^2 + a^2 - 2au + (y-r)^2 + r^2 = 0$$

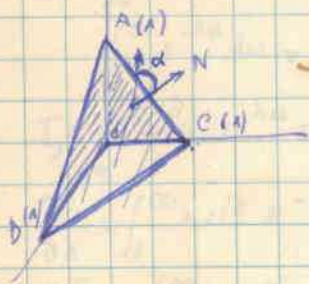
$$u = a \pm \sqrt{a^2 - a^2 + r^2 - (y-r)^2} = a \pm \sqrt{r^2 - (y-r)^2}$$

$$u^2 + y^2 = r^2$$

$$(u-a)^2 + (y-r)^2 = r^2$$

$$I = \int_0^r dy \int_{a-\sqrt{r^2-(y-r)^2}}^{a+\sqrt{r^2-(y-r)^2}} \frac{u^2 - y^2}{u^2 + y^2} \, du$$

13) - Calcular $I = \iint_S (x^2 \cos \alpha + y^2 \cos \beta + z^2 \cos \gamma) dS$ em relação às 4 faces do tetraedro que tem o vértice na origem e os outros nos pontos $A(0,0,1)$, $B(1,0,0)$, $C(1,0,0)$.



$$I_1 = \iint_{AOC} y^2 \cos \beta dS = 0$$

$$I_2 = \iint_{AOB} x^2 \cos \alpha dS = 0$$

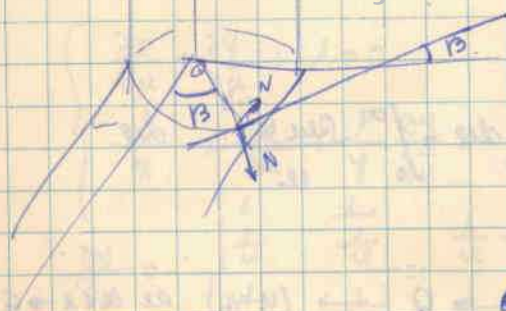
$$I_3 = \iint_{OBC} z^2 \cos \gamma dS = - \iint z^2 dx dy = 0$$

$$I_4 = \iint_{ABC}$$

$$u = y = \frac{z}{2} = 1 \quad \frac{\partial z}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 1$$



Fundação Cuidar o Futuro



$$\tan \beta = \left(\frac{dy}{dx} \right)_P \quad \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}}} = \frac{y}{R}$$

$$\cos \beta = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2}}$$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - (\cos \beta)^2}$$

tomando $u = f(x, y)$

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}$$

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}$$

$$\cos \gamma = \frac{1}{\pm \sqrt{1 + p^2 + q^2}} = \frac{p}{\pm \sqrt{1 + p^2 + q^2}}$$

$$\cos \beta = \frac{1}{\pm \sqrt{1 + p^2 + q^2}} = \frac{q}{\pm \sqrt{1 + p^2 + q^2}}$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\pm \sqrt{1 + p^2 + q^2}} = \frac{1}{\pm \sqrt{1 + p^2 + q^2}}$$

é a derivada de z dependente em rel. à ind. com a qual N faz o ângulo γ .

$$u^2 + y^2 = R^2$$

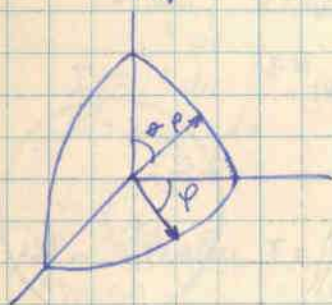
$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{y}{u}\right)^2}} = \frac{\frac{y}{R}}{\sqrt{1 + \frac{y^2}{u^2}}} = \frac{y}{R}$$

$$\text{Sen } \alpha = \cos \beta = \frac{1}{\sqrt{1 + y^2}}$$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{1}{1 + y^2}}$$

$$I = \iiint_V du \, dy \, dz$$

$$u^2 + y^2 + z^2 = R^2$$



$$\begin{aligned} I &= \iint_S du \, dy \int_{-\sqrt{u^2+y^2}}^{\sqrt{u^2+y^2}} dz = \\ &= 2 \iint_S \sqrt{u^2+y^2} \, du \, dy = \\ &= 2 \int_0^R du \int_0^{\sqrt{R^2-u^2}} \sqrt{u^2+y^2} \, dy \end{aligned}$$

Fundação Cuidar o Futuro

Ponto de escape:

1) Convergência de:

$$\int_0^{\infty} u^{-a} \text{sen } u^{1-b} \, du = \int_0^{\infty} \frac{\text{sen } u^{1-b}}{u^a} \, du$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\text{sen } u^{1-b}}{u^a} \, du$$

$$1.^\circ \text{ espécie: } \lim_{u \rightarrow 0} u^a \frac{\text{sen } u^{1-b}}{u^a} = 0 \rightarrow (u=a) \text{ se } a < 1 \rightarrow \frac{a}{a} \rightarrow 1 \rightarrow ?$$

$$2.^\circ \text{ espécie: } \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\text{sen } u^{1-b}}{u^a} = \lim_{u \rightarrow \infty} \text{sen } u^{1-b} = \lim_{u \rightarrow \infty} \left[\frac{(u^{1-b})^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right] =$$

2) Calcular $I = \int_0^{\infty} e^{-u} u^{n-1} du$ a partir de $I = \int_0^{\infty} e^{-\lambda u} du$ $\lambda > 0$.

$$\frac{\partial I}{\partial \lambda} = \int_0^{\infty} e^{-\lambda u} du = \int_0^{\infty} -u e^{-\lambda u} du$$

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda u} du = \left[\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda u} \right]_0^{\infty} = -\frac{1}{\lambda}$$

$$I_1 = \int_0^{\infty} -u e^{-\lambda u} du = -\frac{1}{\lambda}$$

$$\frac{\partial I_1}{\partial \lambda} = \int_0^{\infty} -u^2 e^{-\lambda u} du = -\frac{1}{\lambda^2}$$

$$\frac{\partial I_2}{\partial \lambda} = \int_0^{\infty} -u^3 e^{-\lambda u} du = -\frac{2}{\lambda^3}; \frac{\partial I_2}{\partial \lambda} = \int_0^{\infty} u^4 e^{-\lambda u} du = +\frac{6}{\lambda^4}$$

$$I = \int_0^{\infty} e^{-u} u^{n-1} du = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{\lambda^{n-1}}$$



3) Dados: $\begin{cases} u+y+z+w=0 \\ \log u + \log y + \log z + \log w = 0 \end{cases}$

achar as derivadas de u, y em função de x e z .

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial x} + 1 = 0 \\ \frac{1}{u} \times \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{1}{u} = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = - \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{u} & \frac{1}{y} \\ 1 & \frac{1}{u} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{1}{u} & \frac{1}{y} \\ \frac{1}{u} & \frac{1}{y} \end{vmatrix}} = - \frac{\frac{1}{y} - \frac{1}{u}}{\frac{1}{y} - \frac{1}{u}}$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = - \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{u} & \frac{1}{u} \\ \frac{1}{y} & \frac{1}{u} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{1}{u} & \frac{1}{y} \\ \frac{1}{u} & \frac{1}{y} \end{vmatrix}} = - \frac{\frac{1}{u} - \frac{1}{u}}{\frac{1}{u} - \frac{1}{y}} = - \frac{(u-y) \times \frac{1}{u}}{u-y} = - \frac{u(u-y)}{u(u-y)}$$

$$= - \left(\frac{u-y}{y-u} \times \frac{1}{y} \right) = - \frac{y(u-y)}{u(y-u)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} + 1 = 0$$

$$\frac{1}{z} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{\bar{z}} \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} + \frac{1}{2} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = - \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{z} & \frac{1}{\bar{z}} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{z} & \frac{1}{\bar{z}} \end{vmatrix}} = - \frac{\frac{1}{z} - \frac{1}{\bar{z}}}{\frac{1}{z} - \frac{1}{\bar{z}}} = - \left(\frac{z - \bar{z}}{z \bar{z}} \times \frac{y u}{u - y} \right) =$$

$$= - \frac{u(z - \bar{z})}{z(u - y)} = - \frac{u(y - z)}{z(u - y)} = \frac{u y - u z}{z u - z y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = - \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{z} & \frac{1}{\bar{z}} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{z} & \frac{1}{\bar{z}} \end{vmatrix}} = - \frac{\frac{1}{z} - \frac{1}{\bar{z}}}{\frac{1}{z} - \frac{1}{\bar{z}}} = - \left(\frac{z - \bar{z}}{z \bar{z}} \times \frac{y u}{y - u z} \right) =$$

$$= - \frac{y(z - u)}{z(u - y)}$$

Fundação Cuidar o Futuro

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{z z(u - y)^2} \left\{ \left[y \frac{\partial u}{\partial z} + u \frac{\partial y}{\partial z} - z \frac{\partial u}{\partial z} - u \right] (z u - z y) - \left[u + z \frac{\partial u}{\partial z} - y - z \frac{\partial y}{\partial z} \right] (u y - u z) \right\}$$

etc..

4) - Dado $\int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ calcular $I = \int_0^{\infty} e^{-(t^2 + \frac{\lambda^2}{t^2})} dt$

$$\frac{\partial I}{\partial \lambda} = \frac{\partial}{\partial \lambda} \int_0^{\infty} -\frac{\lambda}{t^2} e^{-(t^2 + \frac{\lambda^2}{t^2})} dt =$$

$$= -2 \int_0^{\infty} e^{-(\frac{\lambda^2}{u^2} + u^2)} du = -2 \int_0^{\infty} e^{-(\frac{\lambda^2}{u^2} + u^2)} du = -\frac{\lambda}{t^2} dt = du$$

$$= -2 I$$

$$-2 I = \frac{\partial I}{\partial \lambda} \rightarrow \frac{\partial I}{I} = -2 \partial \lambda$$

$$\int \frac{dI}{I} = -2 \int d\lambda$$

$$\log I = -2\lambda + C, = -2\lambda + \log C$$

$$\log \frac{I}{C} = -2\lambda$$

$$I = C e^{-2\lambda}$$

Quando $\lambda = 0 \rightarrow I = \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ e $I = C = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

$$I = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-2\lambda}$$

Fundação Cuidar o Futuro

5) - Estudar a convergência, $\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t^2} dt$

6) - Achse um limite inferior pela desigualdade de Lehmütz:

$$I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin u}{\sqrt{u}} du$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 u) du \times \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{u}}\right)^2 du \geq \left[\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin u}{\sqrt{u}} du \right]^2$$

$$\left[-\frac{\cos 2u + u}{2} \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \times \left[\log u \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \geq I^2$$

$$\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{2+\pi}{8} \right) \times \left(\log \frac{\pi}{2} - \log \frac{\pi}{4} \right) \geq I^2$$

$$\left(\frac{-\frac{\pi}{4} + \frac{2+\pi}{8}}{8} \right) \times \log 2 \geq I^2$$

$$\frac{2-\pi}{8} \times 0,9 \geq I^2$$

$$I \leq ? - -$$

7) - Dado: $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - 2u \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} = 0$

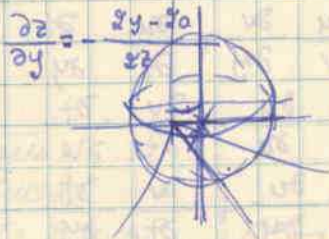
onde para $u = \frac{1}{u}$ e $v = u y$

$$\begin{cases} u = \frac{1}{u} \\ v = u y \end{cases}$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial y} \\ y & u \end{vmatrix} = u \frac{\partial z}{\partial u} - y \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{u} \frac{\partial z}{\partial u} + u y \frac{\partial z}{\partial y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial y} \\ -\frac{1}{u^2} & 0 \\ y & u \end{vmatrix} = -\frac{1}{u^2} \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{u} \frac{\partial z}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} = -2u \frac{\partial z}{\partial u} - u^2 \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + y \frac{\partial z}{\partial y} + u y \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial u} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$



$$\cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4u^2}{4z^2} + \left(\frac{2y-2u}{2z}\right)^2}}$$

$$\begin{cases} u^2 + y^2 + z^2 = 2ay \\ u^2 + z^2 = y^2 \end{cases}$$

$$\iint_S \frac{du \, dy}{\sqrt{1 + 4u^2 + 4y^2 + 4a^2 - 8ay}} =$$

$$\begin{aligned} z^2 &= y^2 - u^2 \\ u^2 + y^2 + y^2 - u^2 &= 2ay \\ 2y^2 - 2ay &= 0 \\ y^2 - ay &= 0 \\ \begin{cases} y=0 \\ y=a \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u^2 + y^2 - 2ay + z^2 &= 0 \\ u^2 + (y-a)^2 + z^2 &= a^2 \\ u^2 + y^2 + a^2 - 2ay + z^2 &= a^2 \end{aligned}$$

$$= \int_0^a du \int_0^a dy$$



$$\begin{aligned} &\sqrt{1 + \frac{4u^2 + 4y^2 + 4a^2 - 8ay}{4z^2}} = \sqrt{1 + \frac{4u^2 + 4y^2 + 4a^2 - 8ay}{4(y^2 - u^2)}} \\ &= \sqrt{\frac{4y^2 + 4u^2 + 4a^2 - 8ay}{4(y^2 - u^2)}} = \sqrt{\frac{2y^2 + 2u^2 + 2a^2 - 4ay}{2(y^2 - u^2)}} \\ &= \sqrt{\frac{2y^2 + 2u^2 + 2a^2 - 4ay}{2(y^2 - u^2)}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{b+u}{\sqrt{z^2 + (b+u)^2}} &= -\frac{b-u}{\sqrt{z^2 + (b-u)^2}} \rightarrow \frac{(b+u)^2}{z^2 + (b+u)^2} = \frac{(b-u)^2}{z^2 + (b-u)^2} \\ \frac{(b+u)^2}{z^2 + (b+u)^2} + \frac{(b-u)^2}{z^2 + (b-u)^2} &= \frac{(b+u)^2}{z^2 + (b+u)^2} + \frac{(b-u)^2}{z^2 + (b-u)^2} \end{aligned}$$

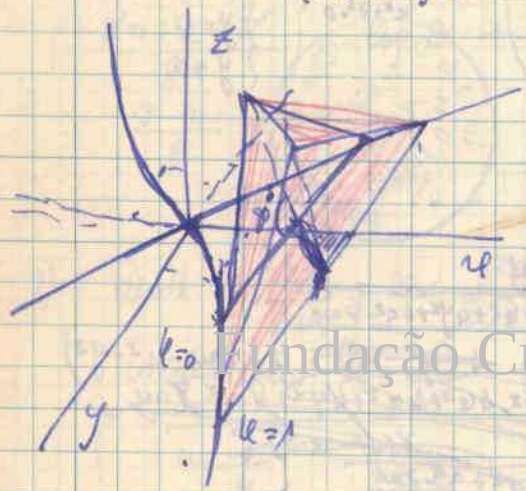
$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 + \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial y} \end{array} \right. \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 2x \frac{\partial u}{\partial v} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y \frac{\partial u}{\partial v} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} =$$

$$y = x^3$$

$$\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=-1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} y=0 \\ y=1 \\ y=-1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x=2 \quad y=8 \\ x=-2 \quad y=-8 \end{array}$$



$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 dx dy dz =$$

$y=x^3$
 $y=x^2$
 $x=0$

Fundação Cuidado Futuro

Cálculo vectorial

Definições fundamentais:

vector $\left\{ \begin{array}{l} \text{quantidade} \\ \text{módulo} \\ \text{direção} \end{array} \right.$

operações de vectores

Formações geométricas:

Def. — $F = \sum_i x_i A_i$ $\left\{ \begin{array}{l} x_i \rightarrow \text{líneas} \\ A_i \rightarrow \text{pontos} \end{array} \right.$

a) $F_1 = F_2$ quando para $\bar{O}$ do espaço é:
 $\sum_i x_i (A_i - O) = \sum_k y_k (B_k - O)$

b) F é nula quando $\sum_i x_i (A_i - O) = 0$ p.º $\bar{O}$.

Soma: $F + F_1 = \sum_i x_i A_i + \sum_k y_k B_k$ (por $\bar{O}$ comum)

Produto: $mF = \sum_i (mx_i) A_i$ $-F = (-1)F = \sum_i (-x_i) A_i$

Distribuição Cuidar o Futuro

$F - F_1 = F + (-F_1)$

Massa de uma formação: $x = \sum_i x_i$

tenemos:

1) — Todo o vector é uma formação de massa nula e reciprocamente.

$B - A = x_1 B + x_2 A$

$x = \sum_i x_i \rightarrow x_1 + x_2 = x_1 - x_1 = 0$ c.g.p.

2) — Logo o ponto é uma formação de massa unitária e reciprocamente.

$A = 1 \cdot A \rightarrow x = 1$ c.g.p.

3) — Formações iguais têm massas iguais.

$F = \sum_i x_i A_i$ $F_1 = \sum_k y_k A_k$
 $F = \sum_i x_i \cdot 0 + \sum_i x_i (A_i - O)$ $F_1 = y_0 \cdot 0 + \sum_k y_k (B_k - O)$

$=$ $=$ $x = y \rightarrow$ c.g.p.

Baricentro:

$$K = \sum x_i A_i = x \cdot 0 + \sum (x_i (A_i - 0)) = x \cdot 0 + \sum x_i A_i \\ = x \cdot 0 + \lambda = x \cdot (0 + \frac{\lambda}{x}) = x \cdot 6$$

Toda a formação cuja linha é $\neq 0$ e é igual ao produto de sua linha pelo seu baricentro.

Donde: $G = \frac{\sum x_i A_i}{\sum x_i}$

Paralelismo de dois vetores:

— Se $\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta}$ há um n.º real λ que $\vec{\beta} = \lambda \vec{\alpha}$.
 $\beta' = |\vec{\beta}| = \frac{|\vec{\beta}|}{|\vec{\alpha}|} \cdot |\vec{\alpha}| = \lambda |\vec{\alpha}|$

Coplanaridade:

— Dados 2 vetores α e β não nulos e não $\parallel$ a um outro
 — no seu plano ou $\parallel$ a esse plano existem sempre dois números reais m e n tais que $\delta = m\alpha + n\beta$.

— Dados 3 vetores α, β, δ não coplanares existe sempre um vector δ da forma $\delta = k\alpha + l\beta + r\gamma$

Caso particular: $\alpha = I, \beta = J, \delta = K$.

Condição de $\parallel$:

$$\delta = xI + yJ + zK$$

$$\delta_1 = u_1 I + y_1 J + z_1 K$$

$$x = m x_1 ; y = m y_1 ; z = m z_1$$

$$\therefore \frac{x}{x_1} = \frac{y}{y_1} = \frac{z}{z_1} = m$$

Condição de coplanaridade de:

$$\delta = uI + yJ + xK$$

$$\delta_1 = u_1 I + y_1 J + z_1 K$$

$$\delta_2 = u_2 I + y_2 J + z_2 K$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_2 = m x + n x_1 \\ y_2 = m y + n y_1 \\ z_2 = m z + n z_1 \end{array} \right.$$

$$\begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix} = 0$$



Operações entre vetores:

a) Produto interno:

$$\alpha/\beta = \text{mod } \alpha \text{ mod } \beta \cos(\alpha, \beta) = \text{mod } \alpha$$

Pp:

$$1) \alpha/\beta = 0 \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \alpha \perp \beta \end{cases}$$

$$2) m(\alpha/\beta) = (m\alpha)/\beta = \alpha/(m\beta)$$

$$3) \alpha/\beta = \beta/\alpha$$

$$4) \alpha/(\beta + \gamma) = \alpha/\beta + \alpha/\gamma$$

$$\alpha/\beta = \text{mod } \alpha \text{ proj}_{\beta} \alpha$$

$$\alpha/\gamma = \text{mod } \alpha \text{ proj}_{\gamma} \alpha$$

$$\alpha/(\beta + \gamma) = \text{mod } \alpha \text{ proj}_{\beta + \gamma} \alpha$$

$$\alpha/(\beta + \gamma) = \alpha/\beta + \alpha/\gamma \quad \text{c.f.p.}$$



Fundação Cuidar o Futuro

b) Produto externo:

$$\text{mod } (\alpha \wedge \beta) = \text{mod } \alpha \text{ mod } \beta \sin(\alpha, \beta)$$

Pp:

$$1) \alpha \wedge \beta = 0 \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \alpha \parallel \beta \end{cases}$$

$$2) m(\alpha \wedge \beta) = (m\alpha) \wedge \beta = \alpha \wedge (m\beta)$$

$$3) \alpha \wedge \beta = -(\beta \wedge \alpha)$$

$$4) \alpha \wedge (\beta + \gamma) = \alpha \wedge \beta + \alpha \wedge \gamma$$

Casos particulares: $\alpha \perp \pi(\beta, \gamma)$

Caso geral: $\alpha \wedge \beta = \alpha \wedge \beta' \quad (\beta' = \text{proj}_{\pi \perp \alpha} \beta)$

$$\beta = m\alpha + \beta'$$

$$\gamma = n\alpha + \gamma'$$

$$\beta + \gamma = (m+n)\alpha + (\beta' + \gamma')$$

$$\alpha \wedge \beta = \alpha \wedge \beta'$$

$$\alpha \wedge \gamma = \alpha \wedge \gamma'$$

$$\alpha \wedge (\beta + \gamma) = \alpha \wedge (\beta' + \gamma') = \alpha \wedge \beta' + \alpha \wedge \gamma' = \alpha \wedge \beta + \alpha \wedge \gamma \text{ c.f.p.} \rightarrow (\text{v. caso particular})$$

c) Duplo produto interno:

Teoremas:

1) - Dados Direct. α e β e for $x \perp \beta$ é:

$$(\alpha \wedge x) \wedge \beta = (\alpha / \beta) \cdot x$$

$$a) (\alpha \wedge x) \wedge \beta = m x$$

$$[\alpha \wedge (\lambda x)] \wedge \beta = m (\lambda x)$$

$$(\alpha \wedge y) \wedge \beta = n y$$

$$[\alpha \wedge (x+y)] \wedge \beta = h \cdot (x+y)$$

$$(\alpha \wedge (x+y)) \wedge \beta = m x + n y$$

$$m x + n y = h(x+y) \rightarrow (m-h)x = (h-n)y$$

$$m-h=0; h-n=0 \rightarrow m=n=h$$

$$b) \alpha / \beta = m$$

$$x=1 \quad x \perp \alpha \quad x \perp \beta$$

$$\begin{aligned} \text{mod } (\alpha \wedge x) \wedge \beta &= \text{mod } \alpha \text{ mod } x \text{ mod } \beta \times \\ &= \text{mod } \alpha \text{ mod } \beta \cos(\alpha, \beta) = \alpha / \beta \text{ c.f.p.} \end{aligned}$$

2) - Dados 3 vectores α, β e γ é:

$$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = (\alpha / \gamma) \cdot \beta - (\beta / \gamma) \cdot \alpha$$

$$\gamma = x + y \quad x \perp \beta \quad y \perp \alpha$$

$$(\alpha \wedge \beta) \wedge (x+y) = (\alpha \wedge \beta) \wedge x + (\alpha \wedge \beta) \wedge y =$$

$$= (\alpha / x) \cdot \beta - (\beta / x) \cdot \alpha - (\beta \wedge \alpha) \wedge y =$$

$$= (\alpha / x) \cdot \beta - (\beta / x) \cdot \alpha - (\beta / y) \cdot \alpha + (\alpha / y) \cdot \beta =$$

$$= (\alpha / \gamma) \cdot \beta - (\beta / \gamma) \cdot \alpha$$

$$\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) = (\alpha / \gamma) \cdot \beta - (\alpha / \beta) \cdot \gamma$$

d) Produto cruzado:

$$\alpha \wedge \beta / \gamma$$

Pp:

$$1) \alpha \wedge \beta / \gamma = 0 \quad \begin{cases} \alpha, \beta, \gamma = 0 \\ \alpha // \beta // \gamma \end{cases}$$

$$2) \alpha \wedge \beta / \gamma = \alpha / \beta \wedge \gamma$$

$$(\alpha \wedge \beta) \wedge (\beta \wedge \gamma) = (\alpha / \beta \wedge \gamma) \cdot \beta - (\beta / \beta \wedge \gamma) \cdot \alpha$$

$$(\alpha \wedge \beta) \wedge (\beta \wedge \gamma) = (\alpha \wedge \beta / \gamma) \cdot \beta - (\alpha \wedge \beta / \beta) \cdot \gamma$$

$$(\alpha / \beta \wedge \gamma) \cdot \beta = (\alpha \wedge \beta / \gamma) \cdot \beta$$

$$\therefore \alpha / \beta \wedge \gamma = \alpha \wedge \beta / \gamma \quad \text{c.f.p.}$$

$$3) \alpha / \beta \wedge \gamma = -\alpha / \gamma \wedge \beta$$

$$4) \alpha / \beta \wedge \gamma = \beta / \gamma \wedge \alpha$$

Exemplos cartesianos dos produtos vectoriais:

a) Produto interno: $\alpha / \beta = a a_1 + b b_1 + c c_1$

b) Produto externo: $\alpha \wedge \beta =$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix}$$

c) Produto misto: $\alpha \wedge \beta / \gamma =$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

Operações:

1) rotação real:

$$I \wedge \alpha = i \alpha$$

$$I \perp \pi(\alpha)$$

Pp:

$$1) i(\alpha + \beta) = i\alpha + i\beta$$

$$2) i(m\alpha) = m(i\alpha)$$

2) rotação geral:

$$\begin{aligned} \beta &= m\alpha + \beta' \\ &= m\alpha + n \cdot i\alpha = \\ &= \cos\theta \alpha + i \sin\theta \alpha = \\ &= (\cos\theta + i \sin\theta) \alpha = e^{i\theta} \cdot \alpha \end{aligned}$$



3) operações complexas:

$$\begin{aligned} \beta &= \rho e^{i\theta} \cdot \alpha \\ \rho e^{i\theta} &= \rho(\cos\theta + i \sin\theta) = a + ib \\ &\begin{cases} a = \rho \cos\theta \\ b = \rho \sin\theta \end{cases} \end{aligned}$$

Análise Vectorial:

A) Limites de variável pontual:

1) $\lim_{t \rightarrow t_0} \alpha(t) = a$ quando $\lim_{t \rightarrow t_0} [\alpha(t)/b] = a/b$

$\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{r}(t) = P_0$ quando $\lim_{t \rightarrow t_0} (\vec{r} \cdot \vec{P}_0) = 0$

$\lim_{t \rightarrow t_0} \sum_i x_i A_i = x_0 + x_0 \cdot 0$ quando $\lim_{t \rightarrow t_0} x = x_0$ e $\lim_{t \rightarrow t_0} A_i = 0$

com $\sum_i x_i A_i = x_0 \cdot 0 + \sum_i x_i (A_i - 0)$

2) Continuidade no ponto t_0 :

$\lim_{t \rightarrow t_0} \alpha(t) = \alpha(t_0)$

$\lim_{t \rightarrow t_0} A(t) = P(t_0)$

3) Derivadas:

a) $\alpha'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\alpha(t+h) - \alpha(t)}{h}$

↑ vector ↑ vector

↓ vector

$$b) p'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{p(t+h) - p(t)}{h}$$

↓
vetores



$$c) F'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(t+h) - F(t)}{h}$$

$$d) (\alpha + \beta)' = \alpha' + \beta'$$

$$e) (m\alpha)' = m\alpha' + m\alpha'$$

$$f) (\alpha/\beta)' = \alpha'/\beta + \alpha/\beta'$$

$$g) (\alpha \wedge \beta)' = \alpha' \wedge \beta + \alpha \wedge \beta'$$

$$h) \alpha/\alpha = (\text{mod } \alpha) \otimes$$

$$\otimes (\alpha/\alpha') = \otimes \text{mod } \alpha (\text{mod } \alpha)'$$

$$(\text{mod } \alpha)' = \frac{\alpha/\alpha'}{\text{mod } \alpha}$$

$$i) i\alpha = I \wedge \alpha$$

$$(i\alpha)' = I \wedge \alpha' = i\alpha'$$

$$j) e^{i\theta} \cdot \alpha = \cos \theta \cdot \alpha + i \sin \theta \cdot \alpha$$

$$(e^{i\theta} \cdot \alpha)' = -\sin \theta \cdot \theta' \alpha + \cos \theta \cdot \alpha' + i \cos \theta \cdot \theta' \alpha + i \sin \theta \cdot \alpha' =$$

$$= (\cos \theta + i \sin \theta) \alpha' + (\cos \theta i - \sin \theta) \theta' \alpha =$$

$$= (\cos \theta + i \sin \theta) \alpha' + (\cos \theta + i \sin \theta) \theta' i \alpha =$$

$$= e^{i\theta} \cdot \alpha' + e^{i\theta} i \theta' \cdot \alpha$$

Relações entre as funções e as suas derivadas:

1) Teorema: - Se um vector tem módulo constante ($\neq 0$), a sua derivada ou é nula ou é $\perp$ ao vector e reciprocamente:

$$\text{mod } \alpha = c.t.a$$

$$(\text{mod } \alpha)' = \frac{\alpha/\alpha'}{\text{mod } \alpha} = 0$$

$$\alpha/\alpha' = 0 \rightarrow \alpha' = 0 \text{ ou } \alpha \perp \alpha' \text{ c.f.p.}$$

2) Lemma: - Se, sendo α um vetor não nulo, o produto vetorial $\alpha \wedge \alpha'$ é constantemente nulo, α é // a uma direção fixa e reciprocamente.

$$\begin{aligned} \left(\frac{\alpha}{\|\alpha\|} \right)' &= \frac{\alpha' \|\alpha\| - \frac{\alpha \|\alpha'\|}{\|\alpha\|}}{\|\alpha\|^2} = \\ &= \frac{\alpha' \|\alpha\|^2 - (\alpha \|\alpha'\|)}{\|\alpha\|^3} = \frac{\alpha' (\alpha \|\alpha\|) - (\alpha \|\alpha'\|) \alpha}{\|\alpha\|^3} = \\ &= \frac{(\alpha \wedge \alpha') \wedge \alpha}{\|\alpha\|^3} = 0 \\ \frac{\alpha}{\|\alpha\|} &= c.t. \quad c.g.p.. \end{aligned}$$

3) Lemma: - Se sendo $\alpha \wedge \alpha' \geq 0$ é $\alpha \wedge \alpha' / \alpha'' = 0$ o vetor α é // a uma direção fixa.

$$\begin{aligned} (\alpha \wedge \alpha') \wedge (\alpha \wedge \alpha')' &= (\alpha \wedge \alpha') \wedge \left[\underbrace{(\alpha' \wedge \alpha)}_{=0} + (\alpha \wedge \alpha'') \right] = \\ &= (\alpha \wedge \alpha') \wedge (\alpha \wedge \alpha'') \quad \underbrace{(\alpha \wedge \alpha')}_{=0} \wedge \underbrace{(\alpha \wedge \alpha'')}_{=0} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &(\alpha \wedge \alpha') \wedge (\alpha \wedge \alpha')' = 0 \\ \alpha &\perp (\alpha \wedge \alpha') // \lambda \\ \alpha & // \pi \quad c.g.p.. \end{aligned}$$

4) Fórmula de Taylor:

$$\alpha(t+h) = \alpha(t) + h \alpha'(t) + \frac{h^2}{2!} \alpha''(t) + \dots + \frac{h^n}{n!} \left[\alpha^{(n)}(t) + \varepsilon \right]$$

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= f(t) \\ f(t+h) &= f(t) + h f'(t) + \frac{h^2}{2!} f''(t) + \dots + \frac{h^n}{n!} \left[f^{(n)}(t) + \lambda \right] \end{aligned}$$

$$\lambda = \frac{\varepsilon}{h} \rightarrow \text{infinitesimal com } h.$$

B) Função de nível potencial:

B) Gradiente:

Def. - $\text{grad } u / dP = du$

É único:

$$\alpha / dP = du$$

$$\beta / dP = du$$

$$(\alpha - \beta) / dP = 0 \rightarrow (\alpha - \beta) \neq 0 \rightarrow \alpha = \beta \text{ c.p.}$$

Expressão cartesiana:

$$P = 0 + xI + yJ + zK$$

$$dP = dx + dy + dz$$

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz$$

$$adu + bdy + cdz = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz$$

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x} I + \frac{\partial u}{\partial y} J + \frac{\partial u}{\partial z} K$$

Ex:

1) $\text{grad } c \cdot b = 0$

2) $\text{grad } (u+v) = \text{grad } u + \text{grad } v$

3) $\text{grad } f(u, v) = \frac{\partial f}{\partial u} \text{grad } u + \frac{\partial f}{\partial v} \text{grad } v$

$$\begin{aligned} \text{grad } f(u, v) / dP &= \frac{\partial f}{\partial u} \text{grad } u / dP + \frac{\partial f}{\partial v} \text{grad } v / dP \\ &= \frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv = df \end{aligned}$$

4) gradiente e distâncias:

$$\lambda = \text{mod}(P - O)$$

$$d\lambda = \frac{(dP - dO) / (P - O)}{\text{mod}(P - O)} = \frac{(P - O) / dP}{\lambda} - \frac{(P - O) / dO}{\lambda = 0}$$

$$\text{grad } \lambda / dP = d\lambda = \frac{(P - O) / dP}{\lambda}$$

$$\text{grad } \lambda = \frac{P - O}{\lambda}$$

$$\begin{aligned} \lambda &= z = (P - O) / K \\ d\lambda &= dz = K / dP \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \text{grad } x = I \\ \text{grad } y = J \\ \text{grad } z = K \end{cases}$$

Aplicações:

1) $u(P) = u(x, y, z) \rightarrow$ estacionária num ponto $\rightarrow du = 0$
 $du = \text{grad } u / dP = 0 \rightarrow \text{grad } u = 0$

2) $u(P)$ - definida sobre uma superfície S
 $du = \text{grad } u / dP = 0$ (estacionária de du)
 $\text{grad } u \perp dP$ e como $dP \in T_S$ e' $\text{grad } u \perp S$

3) $f(r, r_1) = c.t_e$
 $\text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial r} \text{grad } r + \frac{\partial f}{\partial r_1} \text{grad } r_1$

$df = \text{grad } f / dP = 0$ ($f = c.t_e$)
 No caso de ellipse:

$r + r_1 = c.t_e$
 $\text{grad } f = \text{grad } r + \text{grad } r_1$



$\rightarrow$ bissetriz dos dois vetores = normal

No caso de hipérbole:

$r - r_1 = c.t_e$
 $\text{grad } f = \text{grad } r - \text{grad } r_1$



$\rightarrow$ bissetriz dos dois vetores e do prolongamento do outro = normal

4) Dada $u = r_1 + r_2 \rightarrow$ condições de estacionariedade:
 $du = 0 \rightarrow \text{grad } u / dP = 0 \rightarrow \text{grad } u \perp a \text{ curva}$
 $\text{grad } u = \text{grad } r_1 + \text{grad } r_2$

5) Dados A_1, A_2, A_3 det. P tal que $u = r_1 + r_2 + r_3$
 com $A_1 P = r_1, A_2 P = r_2, A_3 P = r_3$ Refa $\sim \sim \sim$
 $du = \text{grad } u / dP = 0$
 $\text{grad } u = \text{grad } r_1 + \text{grad } r_2 + \text{grad } r_3 = 0$
 Quando fizemos ângulos de 120° entre si.

B₂) Rotacional:

Def: $\text{rot } \alpha / dP \wedge \delta P = d\alpha / \delta P - \delta\alpha / dP$

E' único:

$$a/dP \wedge \delta P = d\alpha / \delta P - \delta\alpha / dP$$

$$b/dP \wedge \delta P = d\alpha / \delta P - \delta\alpha / dP$$

$$(a-b)/dP \wedge \delta P = 0$$

$$a-b=0 \longrightarrow a=b$$

E':

$$\text{rot } \alpha = I \wedge \frac{\partial \alpha}{\partial x} + J \wedge \frac{\partial \alpha}{\partial y} + K \wedge \frac{\partial \alpha}{\partial z}$$

Corolário:

$$\left[I \wedge \frac{\partial \alpha}{\partial x} + J \wedge \frac{\partial \alpha}{\partial y} + K \wedge \frac{\partial \alpha}{\partial z} \right] / dP \wedge \delta P =$$

$$= \left[\left(I \wedge \frac{\partial \alpha}{\partial x} \right) \wedge dP + \left(J \wedge \frac{\partial \alpha}{\partial y} \right) \wedge dP + \left(K \wedge \frac{\partial \alpha}{\partial z} \right) \wedge dP \right] / \delta P =$$

$$= \left[\left(I/dP \right) \frac{\partial \alpha}{\partial x} - \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} / dP \right) I + \left(J/dP \right) \frac{\partial \alpha}{\partial y} - \left(\frac{\partial \alpha}{\partial y} / dP \right) J + \right.$$

$$\left. + \left(K/dP \right) \frac{\partial \alpha}{\partial z} - \left(\frac{\partial \alpha}{\partial z} / dP \right) K \right] / \delta P = \frac{\partial \alpha}{\partial x} du / \delta P - \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} / dP \right) (I / \delta P) +$$

$$+ \frac{\partial \alpha}{\partial y} dy / \delta P - \left(\frac{\partial \alpha}{\partial y} / dP \right) (J / \delta P) + \frac{\partial \alpha}{\partial z} dz / \delta P - \left(\frac{\partial \alpha}{\partial z} / dP \right) (K / \delta P) =$$

$$= \left[\frac{\partial \alpha}{\partial x} dx + \frac{\partial \alpha}{\partial y} dy + \frac{\partial \alpha}{\partial z} dz \right] / \delta P - \left[\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} / dP \right) \delta x + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial y} / dP \right) \delta y + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial z} / dP \right) \delta z \right] = d\alpha / \delta P - \delta\alpha / dP \quad \text{c.f.p.}$$

Exemplos cartesianos:

$$\alpha = aI + bJ + cK$$

$$\text{rot } \alpha = I \wedge \left(\frac{\partial a}{\partial x} I + \frac{\partial b}{\partial x} J + \frac{\partial c}{\partial x} K \right) + J \wedge \left(\frac{\partial a}{\partial y} I + \frac{\partial b}{\partial y} J + \frac{\partial c}{\partial y} K \right) +$$

$$+ K \wedge \left(\frac{\partial a}{\partial z} I + \frac{\partial b}{\partial z} J + \frac{\partial c}{\partial z} K \right) = \begin{vmatrix} I & J & K \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a & b & c \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\partial c}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial z} \right) I + \left(\frac{\partial c}{\partial z} - \frac{\partial a}{\partial x} \right) J +$$

$$+ \left(\frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y} \right) K \quad \text{ou:}$$

$$\text{rot } \alpha = \text{grad } a \wedge I + \text{grad } b \wedge J + \text{grad } c \wedge K$$

P_P :

$$1) \text{ rot } \alpha = 0$$

$$2) \text{ rot } (\alpha + \beta) = \text{rot } \alpha + \text{rot } \beta$$

$$3) \text{ rot } (m\alpha) = m \text{rot } \alpha + \text{grad } m \wedge \alpha$$

Com efeito temos:

$$\alpha(P) = \alpha(x, y, z)$$

$$m(P) = m(x, y, z)$$

$$\text{rot } (m\alpha) = I \wedge \left(m \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \alpha \frac{\partial m}{\partial x} \right) + J \wedge \left(m \frac{\partial \alpha}{\partial y} + \alpha \frac{\partial m}{\partial y} \right) +$$

$$+ K \wedge \left(m \frac{\partial \alpha}{\partial z} + \alpha \frac{\partial m}{\partial z} \right) = m \left(I \wedge \frac{\partial \alpha}{\partial x} + J \wedge \frac{\partial \alpha}{\partial y} + K \wedge \frac{\partial \alpha}{\partial z} \right) +$$

$$+ I \wedge \alpha \frac{\partial m}{\partial x} + J \wedge \alpha \frac{\partial m}{\partial y} + K \wedge \alpha \frac{\partial m}{\partial z} = m \text{rot } \alpha +$$

$$+ \left(\frac{\partial m}{\partial x} I + \frac{\partial m}{\partial y} J + \frac{\partial m}{\partial z} K \right) \wedge \alpha = m \text{rot } \alpha + \text{grad } m \wedge \alpha$$

B₃) - Divergência

Def:- Sendo λ um vector unitário de direcção arbitária é:

$$\text{div } \alpha = [\text{grad } (\alpha \wedge \lambda) - \text{rot } (\alpha \wedge \lambda)] / \lambda$$

A divergência é independente do vector λ considerado:

$$\text{grad } (\alpha / \lambda) = \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} / \lambda \right) I + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial y} / \lambda \right) J + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial z} / \lambda \right) K$$

$$\text{rot } (\alpha \wedge \lambda) = I \wedge \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} \wedge \lambda \right) + J \wedge \left(\frac{\partial \alpha}{\partial y} \wedge \lambda \right) + K \wedge \left(\frac{\partial \alpha}{\partial z} \wedge \lambda \right) =$$

$$= \left(I / \lambda \right) \frac{\partial \alpha}{\partial x} - \left(I / \frac{\partial \alpha}{\partial x} \right) \cdot \lambda + \left(J / \lambda \right) \frac{\partial \alpha}{\partial y} - \left(J / \frac{\partial \alpha}{\partial y} \right) \cdot \lambda +$$

$$+ \left(K / \lambda \right) \frac{\partial \alpha}{\partial z} - \left(K / \frac{\partial \alpha}{\partial z} \right) \cdot \lambda$$

$$\text{div } \alpha = [\text{grad } (\alpha / \lambda) - \text{rot } (\alpha \wedge \lambda)] / \lambda =$$

$$\begin{aligned}
 &= \left(\frac{\partial v}{\partial x} / \lambda \right) (I/\lambda) + \left(\frac{\partial v}{\partial y} / \lambda \right) (J/\lambda) + \left(\frac{\partial v}{\partial z} / \lambda \right) (K/\lambda) - \\
 &- \left(\frac{I}{\lambda} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial x} / \lambda \right) + \left(\frac{J}{\lambda} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial y} / \lambda \right) - \left(\frac{K}{\lambda} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial z} / \lambda \right) + \\
 &+ \left(\frac{J}{\lambda} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial y} / \lambda \right) - \left(\frac{K}{\lambda} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial z} / \lambda \right) + \left(\frac{K}{\lambda} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial z} / \lambda \right) = \\
 &= I / \frac{\partial v}{\partial x} + J / \frac{\partial v}{\partial y} + K / \frac{\partial v}{\partial z} \rightarrow \text{independente de } \lambda \text{ (invariante com } \lambda \text{)}.
 \end{aligned}$$

Exemplos cartesianos:

$$\begin{aligned}
 &\alpha = aI + bJ + cK \\
 \text{div } \alpha &= I / \left(\frac{\partial a}{\partial x} I + \frac{\partial b}{\partial x} J + \frac{\partial c}{\partial x} K \right) + J / \left(\frac{\partial a}{\partial y} I + \frac{\partial b}{\partial y} J + \frac{\partial c}{\partial y} K \right) + \\
 &+ K / \left(\frac{\partial a}{\partial z} I + \frac{\partial b}{\partial z} J + \frac{\partial c}{\partial z} K \right) = \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z}
 \end{aligned}$$

ou:

$$\text{div } \alpha = \text{grad } a / I + \text{grad } b / J + \text{grad } c / K$$

Pp: Fundação Cuidar o Futuro

- 1) $\text{div } c \frac{\alpha}{\lambda} = 0$
- 2) $\text{div } (\alpha + \beta) = \text{div } \alpha + \text{div } \beta$
- 3) $\text{div } (m\alpha) = m \text{div } \alpha + \text{grad } m / \alpha$
- 4) $\text{div } (\alpha \wedge \beta) = \beta / \text{rot } \alpha - \alpha / \text{rot } \beta$

Com efeito, temos:

$$\begin{aligned}
 \text{div } (\alpha \wedge \beta) &= I / \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} \wedge \beta + \alpha \wedge \frac{\partial \beta}{\partial x} \right) + J / \left(\frac{\partial \alpha}{\partial y} \wedge \beta + \alpha \wedge \frac{\partial \beta}{\partial y} \right) + \\
 &+ K / \left(\frac{\partial \alpha}{\partial z} \wedge \beta + \alpha \wedge \frac{\partial \beta}{\partial z} \right) = I / \frac{\partial \alpha}{\partial x} \wedge \beta + I / \alpha \wedge \frac{\partial \beta}{\partial x} + \\
 &+ J / \frac{\partial \alpha}{\partial y} \wedge \beta + J / \alpha \wedge \frac{\partial \beta}{\partial y} + K / \frac{\partial \alpha}{\partial z} \wedge \beta + K / \alpha \wedge \frac{\partial \beta}{\partial z} = \\
 &= \beta / \left[I \wedge \frac{\partial \alpha}{\partial x} + J \wedge \frac{\partial \alpha}{\partial y} + K \wedge \frac{\partial \alpha}{\partial z} \right] - \alpha / \left[I \wedge \frac{\partial \beta}{\partial x} + \right. \\
 &\left. + J \wedge \frac{\partial \beta}{\partial y} + K \wedge \frac{\partial \beta}{\partial z} \right] = \beta / \text{rot } \alpha - \alpha / \text{rot } \beta \quad \text{c.f.p..}
 \end{aligned}$$

Operadores Vetoriais:

1) $\nabla \cdot \text{rot grad } u = 0$ $\nabla \cdot \nabla$ seja $u(x, y, z)$ escalar.

Com efeitos de operadores:

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{k}$$

$$\text{rot grad } u = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} \right) \mathbf{i} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) \mathbf{k} = 0 \quad \text{c.f.p.}$$

Reciprocamente: - Todo o vetor cuja rotacional é identicamente nula é um gradiente.
 $\mathbf{v} = a \mathbf{i} + b \mathbf{j} + c \mathbf{k}$

$$\text{rot } \mathbf{v} = 0$$

$$\left(\frac{\partial c}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial a}{\partial z} - \frac{\partial c}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y} \right) \mathbf{k} = 0$$

$$\frac{\partial c}{\partial y} = \frac{\partial b}{\partial z}$$

$$\frac{\partial a}{\partial z} = \frac{\partial c}{\partial x}$$

$$\frac{\partial b}{\partial x} = \frac{\partial a}{\partial y}$$

$$a dx + b dy + c dz = du$$

$$a = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad b = \frac{\partial u}{\partial y}; \quad c = \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$\mathbf{v} = \frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{k}$$

$$\mathbf{v} = \text{grad } u \quad \text{c.f.p.}$$

2) Se $\text{div rot } \alpha = 0$ então α é o vetor $\alpha = aI + bJ + cK$

$$\text{rot } \alpha = \begin{vmatrix} I & J & K \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a & b & c \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial c}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial z} \right) I + \left(\frac{\partial a}{\partial z} - \frac{\partial c}{\partial x} \right) J + \left(\frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y} \right) K$$

$$\text{div rot } \alpha = \left(\frac{\partial^2 c}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 b}{\partial y \partial x} \right) + \left(\frac{\partial^2 a}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 c}{\partial z \partial x} \right) + \left(\frac{\partial^2 b}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 a}{\partial z \partial x} \right) = 0 \quad \text{o.s.p.}$$

Reciprocamente: - Se o vetor cuja divergência é nula é um rotacional.

$$\text{div } \alpha = 0$$

$$\alpha = aI + bJ + cK$$

$$\alpha = \text{rot } \beta$$

$$\beta = a_1 I + b_1 J + c_1 K$$

$$\text{rot } \beta = \left(\frac{\partial c_1}{\partial y} - \frac{\partial b_1}{\partial z} \right) I + \left(\frac{\partial a_1}{\partial z} - \frac{\partial c_1}{\partial x} \right) J + \left(\frac{\partial b_1}{\partial x} - \frac{\partial a_1}{\partial y} \right) K$$

$$\begin{cases} \frac{\partial c_1}{\partial y} - \frac{\partial b_1}{\partial z} = a \\ \frac{\partial a_1}{\partial z} - \frac{\partial c_1}{\partial x} = b \\ \frac{\partial b_1}{\partial x} - \frac{\partial a_1}{\partial y} = c \end{cases}$$

$$0 = \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z} = \text{div } \alpha$$

3) $\text{div grad } u = \Delta u$

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x} I + \frac{\partial u}{\partial y} J + \frac{\partial u}{\partial z} K$$

$$\text{div grad } u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \Delta u$$

4) $\text{grad div } \alpha - \text{rot rot } \alpha = \Delta \alpha$
 Com efeito temos:

$$\text{div } \alpha = \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z}$$

$$\begin{aligned} \text{grad div } \alpha &= \left(\frac{\partial^2 a}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 b}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 c}{\partial z \partial x} \right) \mathbf{I} + \\ &+ \left(\frac{\partial^2 a}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 b}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial z \partial y} \right) \mathbf{J} + \left(\frac{\partial^2 a}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 b}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} \right) \mathbf{K} \\ \text{rot } \alpha &= \left(\frac{\partial c}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial z} \right) \mathbf{I} + \left(\frac{\partial a}{\partial z} - \frac{\partial c}{\partial x} \right) \mathbf{J} + \left(\frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y} \right) \mathbf{K} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{rot rot } \alpha &= \left(\frac{\partial^2 b}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 a}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 a}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial x \partial z} \right) \mathbf{I} + \\ &+ \left(\frac{\partial^2 c}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 b}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial y \partial x} \right) \mathbf{J} + \\ &+ \left(\frac{\partial^2 a}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 b}{\partial z \partial y} \right) \mathbf{K} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{grad div } \alpha - \text{rot rot } \alpha &= \left(\frac{\partial^2 a}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial z^2} \right) \mathbf{I} + \\ &+ \left(\frac{\partial^2 b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 b}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 b}{\partial z^2} \right) \mathbf{J} + \left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} \right) \mathbf{K} = \\ &= \Delta a \mathbf{I} + \Delta b \mathbf{J} + \Delta c \mathbf{K} = \Delta \alpha \quad \text{c.f.p.} \end{aligned}$$

Operador K_α :

Def: — $K_\alpha (\beta / dP = \beta / d\alpha$

É único:

$$\text{Def: } \lambda = \left(\beta / \frac{\partial \alpha}{\partial x} \right) \mathbf{I} + \left(\beta / \frac{\partial \alpha}{\partial y} \right) \mathbf{J} + \left(\beta / \frac{\partial \alpha}{\partial z} \right) \mathbf{K}$$

$$\begin{aligned} \lambda / dP &= \left(\beta / \frac{\partial \alpha}{\partial x} \right) dx + \left(\beta / \frac{\partial \alpha}{\partial y} \right) dy + \left(\beta / \frac{\partial \alpha}{\partial z} \right) dz = \\ &= \beta / d\alpha \end{aligned}$$

$K_\alpha \beta = \lambda$; (β, λ) unicamente determinados logo K_α também o é.

$\mathcal{P}_P$:

$$1) K_\alpha (\beta + \gamma) = K_\alpha \beta + K_\alpha \gamma$$

$$2) K_\alpha (m \beta) = m K_\alpha \beta$$

$$3) K_{\alpha+\beta} \gamma = K_\alpha \gamma + K_\beta \gamma$$

Com efeito vemos:

$$\begin{aligned} K_{\alpha+\beta} \gamma / dP &= \gamma / d(\alpha + \beta) = \gamma / (d\alpha + d\beta) = \gamma / d\alpha + \gamma / d\beta = \\ &= K_\alpha \gamma / dP + K_\beta \gamma / dP = (K_\alpha \gamma + K_\beta \gamma) / dP \end{aligned}$$

$$\therefore K_{\alpha+\beta} \gamma = K_\alpha \gamma + K_\beta \gamma \quad \text{c.f.p.}$$

$$\begin{aligned} 4) K_{m\alpha} \beta / dP &= \beta / d(m\alpha) = \beta / (md\alpha + \alpha dm) = \\ &= \beta / md\alpha + \cancel{\beta / \alpha dm} = m K_\alpha \beta / dP + \alpha K_{m\alpha} \beta / dP = \\ &+ \beta / \alpha dm = m K_\alpha \beta / dP + (\beta / \alpha) dm / dP = \end{aligned}$$

$$= [m K_\alpha \beta + (\beta / \alpha) dm] / dP$$

$$K_{m\alpha} \beta = m K_\alpha \beta + (\beta / \alpha) dm$$

$$\begin{aligned} 5) d(\alpha / \beta) &= d\alpha / \beta + \alpha / d\beta = K_\alpha \beta / dP + \beta_\beta \alpha / dP = \\ &= (K_\alpha \beta + K_\beta \alpha) / dP \\ d(\alpha / \beta) &= \text{grad}(\alpha / \beta) / dP \\ \text{grad}(\alpha / \beta) &= K_\alpha \beta + K_\beta \alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6) \text{int} \alpha \wedge dP / dP &= d\alpha / dP - \delta \alpha / dP \\ K_\alpha dP / dP &= dP / d\alpha \\ \text{int} \alpha \wedge dP / dP &= d\alpha / dP - K_\alpha dP / dP = \\ &= (d\alpha - K_\alpha dP) / dP \\ \text{int} \alpha \wedge dP &= d\alpha - K_\alpha dP \end{aligned}$$



Cálculo vectorial integral:

Teorema de Ostrogradski, divergência no do fluxo

$$\iiint_V \operatorname{div} \alpha \, dV = - \iint_S N/\alpha \, dS \quad N \rightarrow \text{normal exterior}$$

$$\Sigma N/\alpha =$$

$$= \alpha/I \, dy \, dz - \left(\alpha + \frac{\partial \alpha}{\partial x} dx \right) \frac{dy \, dz}{dy}$$

$$= - \frac{\partial \alpha}{\partial x} dx / I \, dy \, dz = - \frac{\partial \alpha}{\partial x} / I \, dx \, dy \, dz$$

$$\Sigma N/\alpha \, dS = - \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} / I + \frac{\partial \alpha}{\partial y} / J + \frac{\partial \alpha}{\partial z} / K \right) dx \, dy \, dz =$$

$$= - \operatorname{div} \alpha \, dx \, dy \, dz$$

$$\lim \Sigma N/\alpha \, dS = - \lim \Sigma \operatorname{div} \alpha \, dx \, dy \, dz$$

$$\iiint_V \operatorname{div} \alpha \, dV = - \iint_S N/\alpha \, dS$$

~~Humildade + Cuidar o Futuro~~

$$\int_V \left(\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial w} \right) dV = - \iint_S (x \cos n_x + y \cos n_y + z \cos n_z) dS$$

Teorema do gradiente:

$$\int_V \operatorname{grad} u \, dV = - \int_S N \cdot u \, dS$$

$$\lambda = u \lambda$$

$$\int_V \operatorname{div} (u \lambda) \, dV = - \int_S N/\lambda u \, dS =$$

$$\int_V (\cancel{\operatorname{div} \lambda} + \operatorname{grad} u / \lambda) \, dV = - \int_S N u \, dS$$

$$\int_V \operatorname{grad} u \, dV = - \int_S N \cdot u \, dS$$

c.f.p.

Lemma de Stokes:

$$\int_V \text{rot } \alpha \, dV = - \int_S N \wedge \alpha \, dS$$

$$\beta = \alpha \wedge \lambda$$

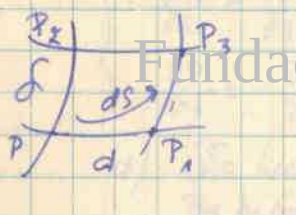
$$\int_V \text{div} (\alpha \wedge \lambda) \, dV = - \int_S N / \alpha \wedge \lambda \, dS$$

$$\int_V \lambda / \text{rot } \alpha - \alpha / \text{rot } \lambda \, dV = - \lambda / \int_S N \wedge \alpha \, dS$$

$$\int_V \text{rot } \alpha \, dV = - \lambda / \int_S N \wedge \alpha \, dS \quad \text{o.s.p.}$$

Lemma de Stokes:

$$\int_L \alpha / dP = \iint_S N / \text{rot } \alpha \, dS$$



$$\begin{aligned} \sum \alpha / dP &= \alpha / dP + (\alpha + d\alpha) / dP - \alpha / dP \\ &= (\alpha + d\alpha) / dP - \alpha / dP = d\alpha / dP = \text{rot } \alpha / dP \wedge dP = \text{rot } \alpha / N \, dS \\ \lim \sum \alpha / dP &= \int_L \alpha / dP = \iint_S N / \text{rot } \alpha \, dS \end{aligned}$$

$$\alpha = xI + yJ + zK$$

$$N = \cos \hat{n}_x I + \cos \hat{n}_y J + \cos \hat{n}_z K$$

$$\begin{aligned} \int_L (xdu + ydy + zdz) &= \iint_S \left[\left(\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial z} \right) \cos \hat{n}_x + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial x}{\partial z} - \frac{\partial z}{\partial x} \right) \cos \hat{n}_y + \left(\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y} \right) \cos \hat{n}_z \right] dS \end{aligned}$$

Lemma de Green:

$$\text{div} (u \text{ grad } v) = u \text{ div grad } v + \text{grad } u / \text{grad } v$$

$$\int_V \operatorname{div}(u \operatorname{grad} v) dV = \int_V [u \operatorname{div} \operatorname{grad} v + \operatorname{grad} u / \operatorname{grad} v] dV =$$

$$= - \int_S N / u \operatorname{grad} v dS$$

$$\int_V (v \operatorname{div} \operatorname{grad} u + \operatorname{grad} v / \operatorname{grad} u) dV = - \int_S N / v \operatorname{grad} u dS$$

$$\int_V (u \operatorname{div} \operatorname{grad} v + v \operatorname{div} \operatorname{grad} u) dV =$$

$$= \int_S (v \operatorname{grad} u - u \operatorname{grad} v) / N dS$$

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} u = \Delta u$$

$$dP = N dn$$

$$du = \operatorname{grad} u / dP = \operatorname{grad} u / N dn$$

$$\frac{du}{dn} = \operatorname{grad} u / N$$

$$\int_V (u \Delta v - v \Delta u) dV = \int_S \left(v \frac{du}{dn} - u \frac{dv}{dn} \right) dS$$

$$P - 0 = xI + yJ + zK$$

$$\operatorname{grad} r = \frac{P - 0}{r}$$

Funções de variável complexa:

1) Def: $f(z) = P + iQ$ $\begin{cases} P(x, y) \\ Q(x, y) \end{cases} \rightarrow z = x + iy$

2) Continuidade:

Quando $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} [f(z + \Delta z) - f(z)] = 0$ e isso acontece de qualquer maneira com Δz seja a maneira como $\Delta z \rightarrow 0$.

3) Derivada:

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \quad \text{qualquer que seja a maneira como } \Delta z \text{ tende para zero.}$$

Uma f. diz-se analítica ou monogênica num ponto z , quando tem nesse ponto uma derivada bem determinada.

4) Condições de analiticidade:

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} \\ \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x} \end{cases}$$

a) - São necessárias as condições:
Por hipótese é analítica.

$$f = P + iQ$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial P}{\partial x} + i \frac{\partial Q}{\partial x} = f'_x(z) \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial P}{\partial y} + i \frac{\partial Q}{\partial y} = f'_y(z) \end{aligned} \right.$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} + i \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{1}{i} \left(\frac{\partial P}{\partial y} + i \frac{\partial Q}{\partial y} \right) = -\frac{\partial P}{\partial y} + i \frac{\partial Q}{\partial y}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x} &= -\frac{\partial Q}{\partial y} \\ \frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{\partial Q}{\partial x} \end{aligned} \right.$$

c.f.p.

b) - São suficientes as condições:



$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} =$$

$$= \lim_{\substack{\Delta u=0 \\ \Delta v=0}} \frac{P(x+\Delta x, y+\Delta y) + iQ(x+\Delta x, y+\Delta y) - P(x, y) - iQ(x, y)}{\Delta x + i\Delta y}$$

$$= \lim_{\substack{\Delta x=0 \\ \Delta y=0}} \frac{P(x+\Delta x, y+\Delta y) - P(x, y) + i[Q(x+\Delta x, y+\Delta y) - Q(x, y)]}{\Delta x + i\Delta y}$$

$$= \lim_{\substack{\Delta x=0 \\ \Delta y=0}} \frac{\Delta x \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right) + \Delta y \left(\frac{\partial P}{\partial y} \right) + i \left[\Delta x \left(\frac{\partial Q}{\partial x} \right) + \Delta y \left(\frac{\partial Q}{\partial y} \right) \right]}{\Delta x + i\Delta y}$$

$$= \lim_{\substack{\Delta x=0 \\ \Delta y=0}} \frac{\Delta x \left[\frac{\partial P}{\partial x} + \epsilon_1 \right] + \Delta y \left[\frac{\partial P}{\partial y} + \epsilon_2 \right] + i \left\{ \Delta x \left[\frac{\partial Q}{\partial x} + \epsilon_3 \right] + \Delta y \left[\frac{\partial Q}{\partial y} + \epsilon_4 \right] \right\}}{\Delta x + i\Delta y}$$

$$= \lim_{\substack{\Delta x=0 \\ \Delta y=0}} \frac{(\Delta x + i\Delta y) \left[\frac{\partial P}{\partial x} + i \frac{\partial Q}{\partial x} \right] + \Delta x \epsilon_1 + \Delta y \epsilon_2 + i \Delta x \epsilon_3 + i \Delta y \epsilon_4}{\Delta x + i\Delta y}$$

$$f'(z) = \frac{\partial P}{\partial x} + i \frac{\partial Q}{\partial x} + \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta}{\Delta}$$

$$f'(z) = \frac{\partial P}{\partial x} + i \frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$= \frac{\partial P}{\partial x} + i \frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$= \frac{\partial P}{\partial x} - i \frac{\partial P}{\partial y}$$

$$= \frac{\partial Q}{\partial y} - i \frac{\partial P}{\partial y}$$

+) Se funções $P(x, y)$ e $Q(x, y)$ são potenciais integrais arbitrárias.

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} \\ \frac{\partial P}{\partial y} = - \frac{\partial Q}{\partial x} \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 P}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 Q}{\partial u \partial y} \\ \Delta P = \frac{\partial^2 P}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0 \\ \Delta Q = \frac{\partial^2 Q}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} = 0 \end{array} \right\} \text{funções harmônicas}$$

Então, $\partial \partial P(x,y)$ harmônico de $P(x,y)$.

$$dQ = \frac{\partial Q}{\partial x} dx + \frac{\partial Q}{\partial y} dy = \frac{\partial P}{\partial u} dy - \frac{\partial P}{\partial y} dx$$

$$Q = \int \frac{\partial P}{\partial u} dy - \frac{\partial P}{\partial y} dx$$

Operador D. f:

$$D = \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y}$$

$$f(z) = P + iQ$$

$$D.f = \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) (P + iQ) = \frac{\partial P}{\partial x} + i \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} =$$

$$= \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y} \right) + i \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x} \right)$$

É analítica quando $Df = 0$

É poligrama quando $Df \neq 0$

$$D_{P,i} \left\{ \begin{array}{l} A = \frac{\partial}{\partial u} \\ B = i \frac{\partial}{\partial y} \end{array} \right.$$

$$D = A + B$$

$$AB = BA$$

$$1) Df = A(Bf) + B(Af) = (A+B)f$$

$$2) \begin{array}{l} DA = AD \\ DB = BD \end{array}$$

$$DAf = ADf$$

$$DBf = BDf$$

$$D.D = D^2$$

$$D(Df) = D^2f = (A+B)Df$$

$$3) f = P + iQ$$

$$\Delta f = \Delta P + i\Delta Q$$

$$Df = Af + Bf$$

$$ADf = A^2f + ABf$$

$$BDf = BAf + B^2f$$

$$ADf - BDf = (A^2 - B^2)f = (A - B)Df$$

$$\Delta f = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) f$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial x^2} = A^2 \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} = -B^2 \end{cases}$$

Indicação: Cuidar o Futuro

$$\Delta f = (A - B)Df$$

Transformações conformes:

$$u \quad \quad \quad z$$

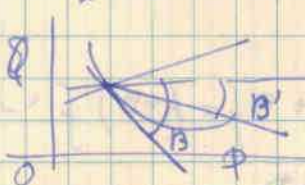
$$u + \Delta u \quad \quad \quad z + \Delta z$$

$$\Delta u = f(z + \Delta z) - f(z)$$

$$p. \quad \frac{\Delta u}{\Delta z} = \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = f'(z)$$

$$u + \Delta u = u_1 \quad \rightarrow \quad u_1 - u = \Delta u$$

$$z + \Delta z = z_1 \quad \rightarrow \quad z_1 - z = \Delta z$$



Se a função $u = f(z)$ é analítica duas curvas quaisquer des-
citas por z_0 no z plano e passando pelo mesmo ponto fazem
entre si um ângulo igual ao das curvas transformadas do
plano da variável u .

Tal transformação é uma transformação conforme.

Toda a função analítica $u = f(z)$ representa uma transfor-
mação conforme do plano da variável z no plano da variável u .

Uma função de variável complexa é holomorfa dentro
de uma certa região do espaço quando é contínua e analítica
em todos os pontos dessa região e uniforme dentro dessa
região.

Integral definida de variável complexa:

Def: Seja $f(z)$ contínua ao longo de AB ; cons. o arco dividido
em n arcos parciais z_k ^{valores pontos} $z_{k+1} - z_k$, em cada arco parcial
tomemos o ponto z_k e cons. o valor de f nesse ponto.

$\lim \sum f(z_k) (z_{k+1} - z_k)$ é o integral curvilíneo
de $f(z)$ ao longo do arco AB e se o arco AB for
o contorno γ de D seja a maneira como o arco se divide e subdi-
vide em arcos parciais, tendendo para zero o seu número
para infinito.

2) Se uma complexa $a+bi$:

$$\begin{cases} z_k = x_k + i y_k \\ \bar{z}_k = a_k + i b_k \\ z_{k+1} = a_{k+1} + i b_{k+1} \\ f(z_k) = P(x_k, y_k) + i Q(x_k, y_k) \end{cases}$$

$$\int_{AB} f(z) dz = \lim \sum [P(x_k, y_k) + i Q(x_k, y_k)] \times$$

$$\times [(a_{k+1} - a_k) + i (b_{k+1} - b_k)] =$$

$$= \lim \sum P(x_k, y_k)(a_{k+1} - a_k) + i \lim \sum Q(x_k, y_k)(a_{k+1} - a_k) + \\ + i \lim \sum P(x_k, y_k)(b_{k+1} - b_k) - \lim \sum Q(x_k, y_k)(b_{k+1} - b_k)$$

$$= \int_{AB} (P dx - Q dy) + i \int_{AB} P dy + Q dx = X + iY$$

$$\begin{cases} X = \int_{AB} P dx - Q dy \\ Y = \int_{AB} P dy + Q dx \end{cases}$$

3) Se uma função analítica.

$$\frac{\partial X}{\partial x} = P \quad \frac{\partial Y}{\partial x} = Q$$

$$\frac{\partial Y}{\partial y} = P \quad \frac{\partial X}{\partial y} = -Q$$

$$\begin{cases} \frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial y} \\ \frac{\partial X}{\partial y} = -\frac{\partial Y}{\partial x} \end{cases} \quad \text{c.f.p.}$$

4) As condições de analiticidade implicam também que as integrais curvilineas X e Y são funções univalentes. Portanto as diferenciais $P dx - Q dy$ e $P dy + Q dx$ são diferenciais exactas e a integral $\int_{AB} f(z) dz$ também é uma diferencial exacta, e independente do caminho de A para B :

$$\int_{AB} f(z) dz = \int_{z_0}^{z_1} f(z) dz \quad \text{com } A \in B \text{ os pontos } z_0 \text{ e } z_1.$$

Teoremas de Cauchy:

1) - $\int_{ACB} f(z) dz = \int_{ADB} f(z) dz$

$f(z) \rightarrow$ analítica numa região G e dentro de todo o contorno



$$\int_L f(z) dz = \int_{ADB} + \int_{BCA} = \int_{ADB} - \int_{ACB} = 0$$

Ao longo de $\bar{G}$ contorno fechado, existente numa região em que a função integranda é analítica, é nulo o integral curvilíneo desta função.

2) - Se $f(z)$ é analítica num certo domínio o seu valor num ponto x complexo do domínio é:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(z) dz}{z-x}$$

Seja L um contorno fechado a que o ponto x é interior, existente no domínio considerado.

Fundação Cuidar o Futuro



$$\int_{L_1} \frac{f(z)}{z-x} dz = 0$$

$$\int_L \frac{f(z) dz}{z-x} = \int_{L_1} \frac{f(z) dz}{z-x}$$

$$f(z) = f(x) + \varepsilon \quad (\text{para os pontos de } L_1)$$

$$\int_{L_1} \frac{f(z) dz}{z-x} = \int_{L_1} \frac{f(x) dz}{z-x} + \int_{L_1} \frac{\varepsilon dz}{z-x} =$$

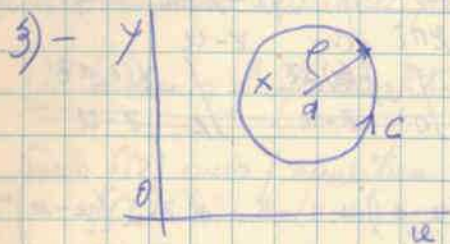
$$= f(x) \int_{L_1} \frac{dz}{z-x} + \int_{L_1} \frac{\varepsilon dz}{z-x}$$

$$z-x = \rho e^{i\theta}$$

$$dz = \rho e^{i\theta} i d\theta$$



Logo quando uma função é analítica num domínio é também regular nesse domínio, isto é, admite derivadas de todas as ordens.



$$f(u) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z) dz}{(z-u)}$$

$$\frac{1}{z-u} = \frac{1}{(z-a) - (u-a)} = \frac{1}{z-a} + \frac{u-a}{(z-a)^2} + \frac{(u-a)^2}{(z-a)^3} + \dots + \frac{(u-a)^{n-1}}{(z-a)^n} + \frac{(z-a)^n (z-u)}{(z-a)^n (z-u)}$$

$$f(u) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z) dz}{z-a} + \frac{u-a}{2\pi i} \int_C \frac{f(z) dz}{(z-a)^2} + \dots + \frac{(u-a)^{n-1}}{2\pi i} \int_C \frac{f(z) dz}{(z-a)^n} + \dots$$

$$f(u) = f(a) + (u-a) f'(a) + \frac{(u-a)^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{(u-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + \dots$$

$$+ \frac{(u-a)^n}{2\pi i} \int_C \frac{f(z) dz}{(z-a)^n (z-u)} \rightarrow \text{Série de Taylor para as funções analíticas}$$

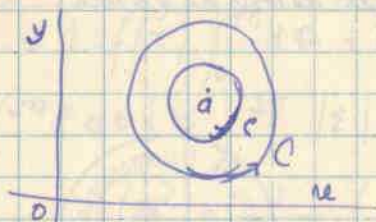
$$f(u) = f(a) + (u-a) f'(a) + \dots + \frac{(u-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + \dots$$

$$f(u) = A_0 + A_1(u-a) + \dots + A_n(u-a)^n + \dots$$

$$A_0 = f(a)$$

$$A_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z) dz}{(z-a)^{n+1}} = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

Série de Laurent:



$$f(u) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C-C} \frac{f(z) dz}{z-u} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z) dz}{z-u} - \int_C \frac{f(z) dz}{z-u}$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z) dz}{z-u} = A_0 + A_1(u-a) + \dots + A_n(u-a)^n + \dots$$

$$A_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z) dz}{(z-a)^{n+1}}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z) dz}{z-u} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z) dz}{u-z}$$

$$\frac{1}{u-z} = \frac{1}{(u-a) - (z-a)} = \frac{1}{u-a} + \frac{z-a}{(u-a)^2} + \dots + \frac{(z-a)^{n-1}}{(u-a)^n} + \dots$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z) dz}{u-z} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z) dz}{u-a} + \frac{z-a}{2\pi i} \int_C \frac{f(z) dz}{(u-a)^2} + \dots$$

$$+ \dots + \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z) dz}{(u-a)^n} + \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{(z-a)^{n-1} f(z) dz}{(u-a)^n}$$

$$B_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) (z-a)^{n-1} dz$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z) dz}{(u-z)} = \frac{B_1}{(u-a)} + \frac{B_2}{(u-a)^2} + \dots + \frac{B_n}{(u-a)^n} + \dots$$

$$f(u) = A_0 + A_1(u-a) + \dots + A_n(u-a)^n + \dots + \frac{B_1}{u-a} + \dots$$

$$+ \frac{B_2}{(u-a)^2} + \dots + \frac{B_n}{(u-a)^n} + \dots$$

Se a função também é analítica dentro do contorno
o integrando é pelo 1.º teorema de Cauchy (nulo) e
 $f(u)$ reduz-se à série de Taylor.

A 2.ª série é convergente em todo o plano; a 1.ª que só é convergente dentro da escoa circular; Logo $f(z)$ é convergente dentro da escoa limitada por z e C .

Teorema das séries analíticas:

Seja $f(z)$ uma f. analítica dentro de C de centro em a e:

$$f(z) = A_0 + A_1(z-a) + \dots + A_n(z-a)^n + \dots$$

em que: $A_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$

Sup. $f(a) = 0$, podemos anular as ordens A_n .

Se no ponto a são nulas todas as derivadas de ordem $\leq (n-1)$ até a ordem $n-1$ com $A_0 = 0, A_1 = \dots = A_{n-1} = 0$ sendo $A_n \neq 0$ diz-se que a é um zero de ordem n para $f(z)$.

Portanto:

$$f(z) = (z-a)^n [A_n + A_{n+1}(z-a) + \dots] = (z-a)^n \phi(z)$$

$\phi(z)$ é uma f. contínua de z .

Teorema de Cauchy: Cuidar o Futuro

O desenvolvimento de uma f. holomorfa em todo o plano dentro duma circunferência com centro na origem é:

$$f(z) = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \dots + A_n z^n + \dots$$

$$A_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z) dz}{z^{n+1}} = \frac{f^{(n)}(z)}{n!}$$

$$|f(z)| \leq M$$

$$|A_n| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{2\pi R M}{R^{n+1}} = \frac{M}{R^n}$$

$$|f^{(n)}(z)| \leq \frac{n! M}{R^n}$$

$$R \rightarrow \infty \rightarrow f^{(n)}(z) \rightarrow 0$$

$\therefore$ - Toda função holomorfa em todo o plano reduz-se a uma constante.

Fontes naturais (pontos e complicados):

Ponto ordinário — a f. é analítica

Ponto singular — a f. não é analítica $\left\{ \begin{array}{l} \text{isolados} \\ \text{não isolados} \end{array} \right.$

Cons. a série de Laurent. Sup. que: $B_n \neq 0$ e $B_{n+1} = B_n + 1 = 0$ — para o ponto a . Então a é um polo de ordem n para $f(z)$.

Neste caso a série reduz-se a um número finito de termos.

Os polos são pontos singulares isolados. Os singulares que não são polos são singulares essenciais.

O desenvolvimento de Laurent:

$$f(z) = P(z-a) + G\left(\frac{1}{z-a}\right)$$

Se a é polo — $G\left(\frac{1}{z-a}\right)$ é um polinômio inteiro e chama-se

parte principal do desenvolvimento da função $f(z)$ em relação ao polo a . O 1.º coeficiente B_1 é o resíduo da função $f(z)$ em relação ao polo a .

ou:

$$f(z) = A_0 + A_1(z-a) + \dots + A_n(z-a)^n + \dots + \frac{B_1}{z-a} + \frac{B_2}{(z-a)^2} + \dots + \frac{B_n}{(z-a)^n} + \dots$$

$$f(z)(z-a)^n = A_0(z-a)^n + A_1(z-a)^{n+1} + \dots + A_n(z-a)^{2n} + \dots + B_1(z-a)^{n-1} + B_2(z-a)^{n-2} + \dots + B_n$$

Lelemas:

1) — Os zeros de ordem n de uma função analítica são polos de ordem n para a sua recíproca.

Seja:

Seja $f(z)$ analítica na $0 < C$ e a um zero de ordem n . Então $f(z) = (z-a)^n \phi(z)$

Cons. $\psi(z) = \frac{1}{\phi(z)}$ (analítica visto que $0 \neq \phi(z)$)

$$\psi(z) = A_0 + A_1(z-a) + \dots + A_n(z-a)^n + \dots$$

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{(z-a)^n \psi(z)} = \frac{\psi(z)}{(z-a)^n}$$

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{A_0 + A_1(z-a) + \dots + A_n(z-a)^n}{(z-a)^n} = \frac{A_0}{(z-a)^n} + \frac{A_1}{(z-a)^{n-1}} + \dots + A_n + \frac{A_{n+1}}{(z-a)} + \dots$$

Se os nulos forem os da 2.ª série a partir da ordem n . Logo a é um polo de $\frac{1}{f(z)}$. c.f.p..

2) - Se um ponto é polo para uma função, esta cresce indefinidamente na vizinhança desse ponto, tornando-se infinita nele.

Prova:

$$f(z) = A_0 + A_1(z-a) + \dots + A_n(z-a)^n + \frac{B_1}{(z-a)} + \frac{B_2}{(z-a)^2} + \dots + \frac{B_n}{(z-a)^n}$$

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty \quad \text{c.f.p..}$$

Fundação Cuidar o Futuro
Lingüística a distância infinita:

Quando $|z| \rightarrow \infty$ faz-se $z = \frac{1}{z'}$ e entende-se $f(\frac{1}{z'})$ para $z' = 0$.

Se o pto é ponto ordinário para $f(\frac{1}{z'})$ o ∞ é-o para $f(z)$.

" " " é polo " $f(\frac{1}{z'})$ o ∞ " " $f(z)$.

1) Cons. $f(\frac{1}{z'})$ e rep. que a origem $z'=0$ é p. ordinário.

$$f\left(\frac{1}{z'}\right) = A_0 + A_1 z' + A_2 z'^2 + \dots + A_n z'^n$$

$$f(z) = A_0 + \frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z^2} + \dots + \frac{A_n}{z^n}$$

válida no domínio em que $|z'| < R$ $|z| > \frac{1}{R} = R'$

2) Seja $z'=0$ um polo para $f\left(\frac{1}{z'}\right)$.

$$f\left(\frac{1}{z'}\right) = A_0 + A_1 z' + A_2 z'^2 + \dots + A_n z'^n + \dots + f$$

$$+ \frac{B_1}{z'} + \frac{B_2}{z'^2} + \dots + \frac{B_n}{z'^n}$$



$$f(z) = A_0 + \frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z^2} + \dots + \frac{A_n}{z^n} + \dots + f$$

$$+ \frac{B_1 z}{1} + \frac{B_2 z^2}{1} + \dots + \frac{B_n z^n}{1}$$

Quando $A_1 = A_2 = \dots = A_n = 0$
 e $f(z)$:

$$f(z) = A_0 + B_1 z + B_2 z^2 + \dots + B_n z^n \rightarrow \text{polinômio inteiro}$$

Função inteira:

Se uma f. analítica para todo o plano a distância finita no plano.

1) Seja a $f(z) = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \dots + A_n z^n$
 com o ∞ para ponto ordinário.

$\therefore z'=0 \rightarrow$ ponto ordinário para $f\left(\frac{1}{z'}\right)$

$$f\left(\frac{1}{z'}\right) = A'_0 + \frac{A'_1 z'}{1} + \frac{A'_2 z'^2}{1} + \dots + \frac{A'_n z'^n}{1}$$

$$z = \frac{1}{z'} \rightarrow f(z) = A'_0 + \frac{A'_1}{z} + \frac{A'_2}{z^2} + \dots + \frac{A'_n}{z^n}$$

$$A_0 = A'_0 \quad A_1 = A'_1 = \dots = 0$$

$f(z)$ reduz-se à constante A_0 .

2) Seja $f(z) = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \dots + A_n z^n$
 com o ∞ para polo
 $z'=0 \rightarrow$ polo para $f\left(\frac{1}{z'}\right)$

$$f\left(\frac{1}{z'}\right) = \frac{A'_1}{z'} + \frac{A'_2}{z'^2} + \dots + \frac{A'_n}{z'^n} + B_0 + B_1 z' + \dots$$

$$f(z) = A_1 z + A_2 z^2 + \dots + A_n z^n + B_0 + \frac{B_1}{z} + \dots$$

$$A_0 = B_0 \quad A'_i = A_i \quad B'_i = 0 \quad A_n = 0 \quad A'_n = 0$$

$$f(z) = A_1 z + A_2 z^2 + \dots + A_n z^n + B \rightarrow \text{polinômio inteiro}$$

3) Se $f(z)$ é inteira e ∞ não é polo é p. singular essencial $z=0$ é o também para $f\left(\frac{1}{z'}\right)$ e $f(z)$ é uma verdadeira série.

Princípio de d'Alembert:

Se o polinômio inteiro admite, pelo menos, um zero a distância finita.

Deve:

$$f(z) = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \dots + A_n z^n$$

$$\begin{cases} f(z) \rightarrow \text{tem 1 zero a distância finita} \\ f\left(\frac{1}{z}\right) \rightarrow \text{tem 1 polo a distância finita} \end{cases}$$

Se 1 ponto é singular essencial para $f(z)$ é o também para a sua recíproca. Sup. q $1/f(z)$ não tem polo a distância finita. Então: $f(z)$ é pol. logo é sempre analítica, não tem pontos singulares, logo f também os não tem e é uma função inteira. Então:

1) - o ∞ é para $1/f(z)$ um p. ordinário e $1/f(z)$ é c.ª tem como $f(z)$ o que é contra a hipótese de ser um polinômio inteiro.

2) - o ∞ é para $1/f(z)$ um polo e $1/f(z)$ é um polinômio há o modo $f(z)$ o que é contra a hipótese anterior.

3) - o ∞ é um ponto singular essencial para $1/f(z)$ e ∞ é um ponto singular essencial para $f(z)$ e $f(z)$ é uma série o que é contra a hipótese.

Logo como não pode ser uma função inteira admite um polo a distância finita. c.f.p.

Teorema dos resíduos:

Se ao longo dum contorno fechado o integral duma função $f(z)$ é igual ao produto por $2\pi i$ da soma dos ^{resíduos} resíduos da função em relação aos pontos singulares existentes dentro desse contorno.

Cons. a função $f(z) = A_0 + A_1(z-a) + \dots + A_n(z-a)^n +$
$$+ \frac{B_1}{z-a} + \frac{B_2}{(z-a)^2} + \dots + \frac{B_n}{(z-a)^n}$$

Cons. com centro num a uma C ao longo da qual vamos integrar $f(z)$ que é específica feita de a analítica em C.

$$\int_C f(z) dz = \int_C A_0 dz + \int_C A_1(z-a) dz + \dots + \int_C A_n(z-a)^n dz +$$
$$+ \int_C \frac{B_1 dz}{z-a} + \dots + \int_C \frac{B_n dz}{(z-a)^n}$$
$$I = \int_C \frac{dz}{(z-a)^n}$$

$$z-a = \rho \cdot e^{i\theta}$$

$$dz = \rho \cdot i e^{i\theta} d\theta$$

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\rho e^{i\theta} i d\theta}{\rho^n e^{in\theta}} = \frac{1}{\rho^{n-1}} \int_0^{2\pi} e^{i(1-n)\theta} i d\theta =$$
$$= \frac{1}{\rho^{n-1}} \frac{1}{1-n} \left[e^{i(1-n)\theta} \right]_0^{2\pi} = 0 \quad (n > 1)$$

$$\int_C f(z) dz = \int_C \frac{B_1}{z-a} dz + \int_C \cancel{P(z-a)} dz$$

$$\int_C \frac{B_1}{z-a} dz = B_1 \int_0^{2\pi} \frac{\rho e^{i\theta} i d\theta}{\rho e^{i\theta}} = B_1 i \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i B_1$$

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i B_1$$

Se houver alguns pólos, a, b, c , etc., teremos outros pontos contornos de O e o contorno total que a soma desses pontos logo $\int_C f(z) dz = 2\pi i (B_1 + C_1 + \dots)$

Funções meromorfas num certo domínio:

É uma função que, num domínio, só admite polos como pontos singulares.

polo - $a, b, c, \dots$

$$f(z) = \frac{B_1}{z-a} + \frac{B_2}{(z-a)^2} + \dots + P(z-a) = G_1 \left(\frac{1}{z-a} \right) + P(z-a)$$

$$P(z-a) = \frac{B_1}{z-b} + \dots + \frac{B_{n'}}{(z-b)^{n'}} + P_n(z-b) = G_2 \left(\frac{1}{z-b} \right) + P_n(z-b)$$

$$f(z) = \sum G_i \left(\frac{1}{z-a_i} \right) + P(z)$$

Se ∞ é um polo para $f(z)$ podemos construir uma continuação de $f(z)$ que o único polo esteja seja ∞ ; então $P(z)$ é uma polinómio inteiro.

Definição: Uma função meromorfa que admite infinito como polo é uma função racional.

Teorema de Weierstrass-Eurosti:

Dada função $f(z)$, na vizinhança de um ponto singular essencial isolado, aproxima-se tanto quanto quisermos de um número qualquer A , $\forall \delta > 0$.

$$|f(z) - A| < \delta$$

a) a é limite de polos.

$f(z) - A$ é p. singular essencial e logo para $\frac{1}{f(z) - A}$

em $\bar{\delta}$ que vizinhança há polos de $\frac{1}{f(z) - A}$

$$\text{logo } \lim_{z \rightarrow a} \frac{1}{f(z) - A} = \infty \quad \therefore f(z) - A = 0$$

b) Não é limite de polos.

a é p. singular essencial para $\frac{1}{f(z)-A}$; então temos

Aff pode construir-se um domínio $(\mathbb{D})C$; dentro de p é:

$$\frac{1}{f(z)-A} = A_0 + A_1(z-a) + \dots + A_n(z-a)^n + \dots +$$

$$+ \frac{B_1}{z-a} + \frac{B_2}{(z-a)^2} + \dots =$$

$$= P(z-a) + G\left(\frac{1}{z-a}\right)$$

Série inteira convergente dentro de C

convergente em todo o plano excepto em a .

Seja: $\frac{1}{z-a} = u$

$$\frac{1}{f(z)-A} = P\left(\frac{1}{u}\right) + B_1 u + B_2 u^2 + \dots$$

$u \rightarrow 0$
convergente num círculo de centro em a .

$$\frac{1}{f(z)-A} \rightarrow \infty \quad f(z)-A=0$$

Lema de Painlevé:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(z)$$

Integração das funções de mais de uma variável:

Pfaffiano:

$$X_1 du_1 + X_2 du_2 + \dots + X_n du_n = du$$

Teorema: - δ cond. nec. e suf. para que o pfaffiano seja = du
que as derivadas cruzadas sejam iguais.

Prova:

1) A cond. é necessária:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1} du_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} du_2 + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_n} du_n$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = X_1 ; \quad \frac{\partial u}{\partial x_2} = X_2 \quad \dots \quad \frac{\partial u}{\partial x_n} = X_n$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial X_j}{\partial x_i} \quad \dots \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial X_i}{\partial x_j}$$

$$\therefore \frac{\partial X_j}{\partial x_i} = \frac{\partial X_i}{\partial x_j}$$

2) A cond. é suficiente:

Fundação Cuidar o Futuro

$$\frac{\partial X_1}{\partial x_2} = \frac{\partial X_2}{\partial x_1} \quad \frac{\partial u}{\partial x_1} = X_1$$

$$u = \int_{a_1}^{u_1} X_1(u_1, u_2 - u_n) dx_1 + f_2(u_2 - u_n)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_2} = X_2$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_2} = \int_{a_1}^{u_1} \frac{\partial X_2(u_1, u_2, u_n)}{\partial u_2} du_1 + \frac{\partial f_2}{\partial u_2} =$$
$$= X_2(u_1, u_2 - u_n) - X_2(a_1, u_2 - u_n) + \frac{\partial f_2}{\partial u_2} = X_2$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial u_2} = X_2(a_1, u_2 - u_n)$$

$$f_2 = \int_{a_2}^{u_2} X_2(a_1, u_2 - u_n) + f_3(a_3, u_4 - u_n)$$

$$u = \int_{a_1}^{u_1} X_1(u_1 - u_n) du_1 + \int_{a_2}^{u_2} X_2(a_1, u_2 - u_n) du_2 + \frac{\partial \phi_3}{\partial u_3} = X_3(u_1 - u_n) - X_3(a_1 - u_n) + X_3(a_1, u_2 - u_n) - X_3(a_1, a_2 - u_n) + \frac{\partial \phi_3}{\partial u_3} = X_3$$

$$\frac{\partial \phi_3}{\partial u_3} = X_3(a_1, a_2 - u_n)$$

$$u = \int_{a_1}^{u_1} X_1(u_1 - u_n) du_1 + \int_{a_2}^{u_2} X_2(a_1, u_2 - u_n) du_2 + \int_{a_n}^{u_n} X_n(a_1 - a_{n-1}, u_n) du_n + C$$

$$X_1(u_1, u_2) du_1 + X_2(u_1, u_2) du_2 = du$$

$$u_1 = \int_{a_1}^{u_1} X_1(u_1, u_2) du_1 + \int_{a_2}^{u_2} X_2(a_1, u_2) du_2 + C$$

$$u_2 = \int_{a_1}^{u_1} X_1(u_1, u_2) du_1 + \int_{a_2'}^{u_2} X_2(a_1', u_2) du_2 + C$$

$$\lambda = u_2 - u_2' = \int_{a_1'}^{u_1} X_1(u_1, u_2) du_1 + \int_{a_2'}^{u_2} X_2(a_1', u_2) du_2 - \int_{a_2}^{u_2} X_2(a_1, u_2) du_2$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial u_1} = 0$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial u_2} = \int_{a_1'}^{a_1} \frac{\partial X_2(u_1, u_2)}{\partial u_1} du_1 + X_2(a_1', u_2) - X_2(a_1, u_2) = X_2(a_1, u_2) - X_2(a_1, u_2) + X_2(a_1', u_2) - X_2(a_1, u_2)$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial u_2} = \frac{\partial \lambda}{\partial u_1} = 0$$

$\lambda = c.t$

Integrais múltiplos:

Com. o volume (ndimensional) V ; dividimo-lo em intervalos parciais ΔV em cada ΔV tomamos um ponto P e cons. o valor de $f(P)$ nesse ponto. Cons. $\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \sum f(P) \Delta V$.

Este limite existe e é independente do ponto P considerado, do modo como se faz a divisão de V em ΔV e de maneira como cada $\Delta V \rightarrow 0$ e o seu número para os seguintes integrais
o limite de f no domínio V considerado.

$\mathcal{F}_P$:

1. - ore. média nula

2 - contínuas são integráveis

3 - não se altera mudando a f integrando em n pontos

4 - $|\int| \leq \int | |$

5 - $\int_V = \int_{V_1} + \int_{V_2}$ $V = V_1 + V_2$

6 - **Fundação Cuidar do Futuro**

7 - mantém-se a desigualdade de Schwarz.

8 - é uma funcional de sua fronteira.

Integrais duplos:

$$\lim \left\{ \sum_k \sum_i h_i h_k f(x_i, y_k) + [\varepsilon_k |k + \varepsilon'_k f'_k] \right\} =$$

$$= \iint_A f(x, y) dx dy = \int_a^b dy \int_{\phi_1(y)}^{\phi_2(y)} f(x, y) dx$$

$$\alpha \begin{cases} \frac{F(x, y)}{\partial F} \\ \frac{\partial F}{\partial u} \end{cases} \quad \begin{cases} u_1 = \phi_1(y) \\ u_2 = \phi_2(y) \end{cases}$$

Substituição de variáveis nos integrais duplos:

$$\iint_A f(u, v) du dv = \int_x^x dy \int_x^x f(u, v) du$$

$$\begin{cases} u = \phi(u, v) \\ y = \psi(u, v) \\ du = \frac{\partial \phi}{\partial u} du + \frac{\partial \phi}{\partial v} dv \\ dy = \frac{\partial \psi}{\partial u} du + \frac{\partial \psi}{\partial v} dv \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \phi &\rightarrow u & y &= c.t.e \\ 0 &= \frac{\partial \phi}{\partial u} du + \frac{\partial \phi}{\partial v} dv \end{aligned}$$

$$dv = - \frac{\frac{\partial \phi}{\partial u} du}{\frac{\partial \psi}{\partial v}}$$

$$dy = \left(\frac{\partial \phi}{\partial u} du + \frac{\partial \phi}{\partial v} \frac{\partial \psi}{\partial u} du \right) =$$

$$= \left(\frac{\frac{\partial \phi}{\partial u} \frac{\partial \psi}{\partial v} - \frac{\partial \psi}{\partial u} \frac{\partial \phi}{\partial v}}{\frac{\partial \psi}{\partial v}} \right) du =$$

$$= \frac{1}{\frac{\partial \psi}{\partial v}} \frac{\partial(\phi, \psi)}{\partial(u, v)} du = \frac{I}{\frac{\partial \psi}{\partial v}} du$$

$$\iint_A f(u, v) du dv = \int_x^x dy \int_x^x f(u, v) \frac{I}{\frac{\partial \psi}{\partial v}} du =$$

$$= \int_x^x du \int_x^x f[\phi(u, v), \psi] \frac{I}{\frac{\partial \psi}{\partial v}} dy$$

$$u = c.t.e \rightarrow du = 0$$

$$dy = \frac{\partial \psi}{\partial v} dv$$

$$\iint_A f(u, v) du dv = \int_x^x du \int_x^x f[\phi(u, v), \psi(u, v)] \frac{\partial \psi}{\partial u} \frac{\partial \phi}{\partial v} dv =$$

$$= \int_x^x du \int_x^x f[\phi(u, v), \psi(u, v)] I dv$$

Integrais triplas:

$$\lim \left\{ \sum_k s_i \underbrace{(z_{k+1} - z_k)}_{\Delta z_k} f(u_i, y_i, z_k) + \underbrace{(z_i f_i + \epsilon_i f'_i)}_{\leftarrow 0} \right\}$$

$$\lim \sum_i \sum_k s_i f(u_i, y_i, z_k) (z_{k+1} - z_k) =$$

$$= \lim \sum_i s_i \sum_k f(u_i, y_i, z_k) (z_{k+1} - z_k)$$

$$\lim \sum_k f(u_i, y_i, z_k) (z_{k+1} - z_k) = \int_{\theta_1(u, y)}^{\theta_2(u, y)} f(u_i, y_i, z) dz$$

$$\lim \sum_i s_i \phi(u_i, y_i) = \iint_A \phi(u, y) du dy =$$

$$= \iint_A du dy \int_{\theta_1(u, y)}^{\theta_2(u, y)} f(u, y, z) dz$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} dy \int_{F_1(y)}^{F_2(y)} du \int_{\theta_1(u, y)}^{\theta_2(u, y)} f(u, y, z) dz$$

$$\left. \begin{aligned} \theta(u, y, z) &= 0 \\ \frac{\partial \theta}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \right\} F(u, y) = 0$$

Comprimeto de arco:

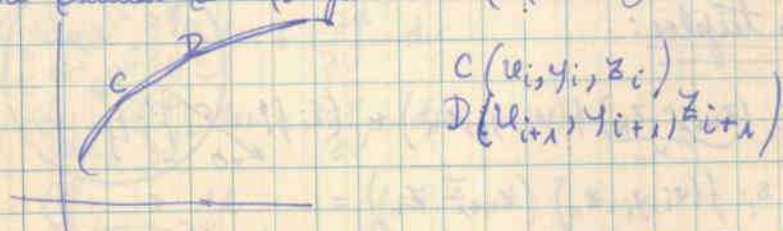
tangente à poligonal no ponto P .
poligonal que passa em P .



Diz-se que o arco e poligonal são vizinhos quando entre os pontos do arco e do poligonal se pode estabelecer uma correspondência biunívoca e contínua tal que os

distâncias entre pontos correspondentes do arco e do poligonal
e os ângulos das tangentes. ^{com pontos correspondentes} Os ângulos serão todos pequenos e
n.º de lados aumenta indefinidamente.

Se o arco $p = s \rightarrow$ comprimento do arco $\overline{AB}$.
As poligonais inscritas são poligonais vizinhas e a partir delas
pode calcular-se o comprimento do arco. Assim temos:



$$\overline{CD} = \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2 + (z_{i+1} - z_i)^2}$$

$$\begin{cases} y = y(t) \\ x = x(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

$$p = \sum \overline{CD} = \sum \sqrt{\dots}$$

$$x_{i+1} - x_i = x(t_i + \Delta t_i) - x(t_i) = \Delta t_i [x'(t_i) + \epsilon_1 \Delta t_i] = \Delta t_i [x'(t_i) + \epsilon_1]$$

$$y_{i+1} - y_i = y(t_i + \Delta t_i) - y(t_i) = \Delta t_i [y'(t_i) + \epsilon_2]$$

$$z_{i+1} - z_i = z(t_i + \Delta t_i) - z(t_i) = \Delta t_i [z'(t_i) + \epsilon_3]$$

$$p = \sum_i \Delta t_i \sqrt{[x'(t_i)]^2 + [y'(t_i)]^2 + [z'(t_i)]^2 + \alpha_i} =$$

$$= \sum_i \Delta t_i \sqrt{\dots} + \Delta t_i \alpha_i$$

$$S = \lim p = \lim \sum_i \Delta t_i \sqrt{\dots} + \lim \sum_i \Delta t_i \alpha_i$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0}$$

$$S = \int_{t_0}^t \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt =$$

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$$

$$ds = \sqrt{x'^2 dt^2 + y'^2 dt^2 + z'^2 dt^2} = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

Lemma:

— 3^o cond. nec. e suf. para que o eixo seja rectificável, isto é, para existir o comprimento de arco, que as funções $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$ sejam de variáveis limitadas no intervalo (t_0, t) .

$$\delta x_i = |x_{i+1} - x_i|$$

$$\delta y_i = |y_{i+1} - y_i|$$

$$\delta z_i = |z_{i+1} - z_i|$$

$$\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i \leq \delta s \leq \delta x_i + \delta y_i + \delta z_i$$

$$V_x, V_y, V_z \leq \delta s \leq V_x + V_y + V_z$$

variáveis de x, y, z em o intervalo $(t_0, t) \rightarrow$ logo são limitadas e δs é sempre inferior à soma tendo para um limite logo existe o comprimento de arco. c.p.p.

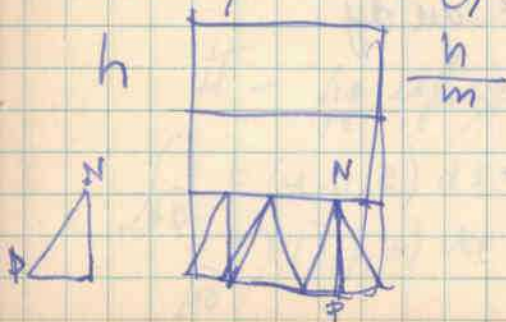
Uma curva superficial:



A superfície é a poliedral se é vizinha quando houver entre os pontos de ambas uma correspondência biunívoca e recíproca de tal modo que as distâncias entre pontos correspondentes na superfície e na poliedral e os ângulos nos pontos tangentes em pontos comuns correspondentes são infinitesimais quando as faces tendem para zero e o seu número para infinito.

Seja s a área de S - Curva A quando as faces tendem para zero e o seu número para infinito, $\oint \oint$ seja o modo como se dá a dupla tendência citada.

A poliedral inscrita tem é vizinha da superfície (observação de Schwarz)



$$\widehat{MP} = 2R \cos \frac{\alpha}{2} = 2R \cos \frac{\pi}{n}$$

$$NP = \sqrt{PQ^2 + NQ^2} = \sqrt{(R-OP)^2 + \left(\frac{h}{m}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(R - R \cos \frac{\pi}{n}\right)^2 + \left(\frac{h}{m}\right)^2} = \sqrt{R^2 \left(1 - \cos \frac{\pi}{n}\right)^2 + \frac{h^2}{m^2}}$$

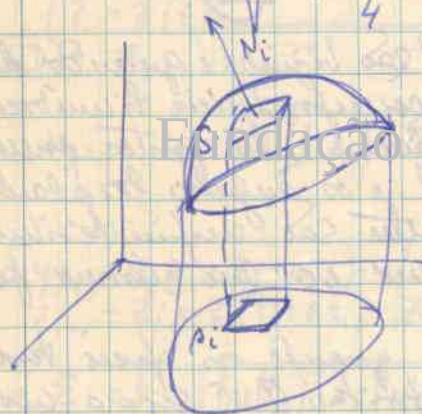
$$\frac{1}{2} 2MP NP = R \cos \frac{\pi}{n} \sqrt{R^2 \left(1 - \cos \frac{\pi}{n}\right)^2 + \frac{h^2}{m^2}} =$$

$$= R \cos \frac{\pi}{n} \sqrt{R^2 4 \cos^4 \frac{\pi}{2n} + \frac{h^2}{m^2}} \quad \boxed{1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}$$

$$S \Rightarrow 2mn R \cos \frac{\pi}{n} \sqrt{\frac{h^2}{m^2} + 4R^2 \cos^4 \frac{\pi}{2n}}$$

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} S = \lim_{m, n \rightarrow \infty} 2m R \pi \sqrt{\frac{h^2}{m^2} + 4R^2 \left(\frac{\pi}{2n}\right)^4} =$$

$$= 2R\pi \sqrt{\frac{h^2}{4} + 4R^2 \pi^4 \left(\frac{h^2}{n^4}\right)} \rightarrow \text{usado há relação entre eles; usado há a te. alg.}$$



~~Escola Cuiabá~~

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{\partial z}{\partial x} \\ q_i &= \frac{\partial z}{\partial y} \\ S_i &= \frac{p_i}{\cos \delta_i} \end{aligned}$$

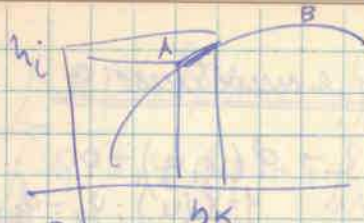
$$p = \frac{\partial z}{\partial x}$$

$$q = \frac{\partial z}{\partial y}$$

$$\begin{aligned} \lim S_i &= \lim p_i \sqrt{1 + p_i^2 + q_i^2} \\ &= \iint_A \sqrt{1 + p^2 + q^2} \, dx \, dy \end{aligned}$$

Integrais curvilíneas:

I - no plano:



Seja o arco AB ; decomponamos em arcos Δs_k e projectamos em Ox e Oy ; em cada arco tomamos P e lemos o valor de $f(u, y)$ neste ponto. Então o integral é:

$$\lim \sum_k h_k f(u_k, y_k) = \int_{AB} f(u, y) du$$

$$L = \sum_k h_i f(u_i, y_i) = \int_{AB} f(u, y) dy$$

$$L = \sum_k \Delta s_k f(u_k, y_k) = \int_{AB} f(u, y) ds = \int_{AB} \left[f(u, y) \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{du} \right)^2} du \right]$$

este integral pode ser definido pela cond. correspondente ao comprimento de arco Δs_k , pois a cond. e o arco são infinitesimais equivalentes.

$$\Delta s_k = \sqrt{(\Delta u_k)^2 + (\Delta y_k)^2}$$

$$\lim \frac{\Delta s_k}{\Delta u_k} = \sqrt{\left(\frac{\Delta y_k}{\Delta u_k} \right)^2 + \left(\frac{\Delta u_k}{\Delta u_k} \right)^2} = \sqrt{\left(\frac{dy}{du} \right)^2 + 1} = 1$$

$\therefore \Delta s_k$ e Δu_k são infinitesimais equivalentes.

O integral curvilíneo pode reduzir-se a um integral simples à Riemann.

$$y_k = f(u_k) \rightarrow \text{equação do arco } AB$$

$$\int_{AB} F(u, y) du = \int_{u_0}^{u_1} F[u, f(u)] du$$

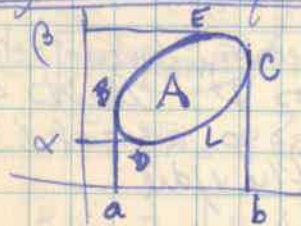
- no espaço: eq. do arco $\begin{cases} y = f(u) \\ z = g(u) \end{cases}$

$$\int_{AB} F(u, y, z) ds = \int_{u_0}^{u_1} F(u, y, z) \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{du} \right)^2 + \left(\frac{dz}{du} \right)^2} du$$

$$\int_{AB} F(u, y, z) du = \int_{u_0}^{u_1} F[u, f(u), g(u)] du$$

Relações entre os integrais duplos e curvilineos:

1.ª fórmula de Riemann:



$$L \rightarrow \phi(u, y) = 0$$

$$y = \phi_1(u); y_2 = \phi_2(u)$$

$$\int_L F(u, y) du =$$

$$= \int_a^b F[u, \phi_1(u)] du + \int_b^a F[u, \phi_2(u)] du$$

$$= \int_a^b \{ F[u, \phi_1(u)] - F[u, \phi_2(u)] \} du$$

$$\iint_A \frac{\partial F}{\partial y} du dy = \int_a^b du \int_{\phi_1(u)}^{\phi_2(u)} \frac{\partial F}{\partial y} dy =$$

$$= \int_a^b \{ F[u, \phi_2(u)] - F[u, \phi_1(u)] \} du$$

$$\boxed{\int_L F(u, y) du = - \iint_A \frac{\partial F}{\partial y} du dy}$$

2.ª fórmula de Riemann:

$$L \rightarrow \phi(u, y) = 0$$

$$\int_L F(u, y) dy = \int_a^b F[y, \psi_1(y)] dy$$

$$+ \int_b^a F[y, \psi_2(y)] dy = \int_a^b \{ F[\psi_2(y), y] - F[\psi_1(y), y] \} dy$$

$$\iint_A \frac{\partial F}{\partial u} dy du = \int_a^b dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} \frac{\partial F}{\partial u} du =$$

$$= \int_a^b \{ F[\psi_2(y), y] - F[\psi_1(y), y] \} dy$$

$$\boxed{\int_L F(u, y) dy = + \iint_A \frac{\partial F}{\partial u} du dy}$$

3.ª fórmula de Riemann:

Aplica a 1.ª a $P(u, y)$ e a 2.ª a $Q(u, y)$.

$$\int_L P(x, y) dx = - \iint_A \frac{\partial P}{\partial y} dx dy$$

$$\int_L Q(x, y) dy = + \iint_A \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy$$

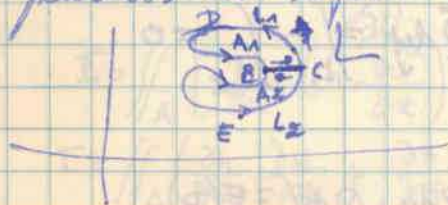
Somando termos certos:

$$\boxed{\iint_A \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_L P dx + Q dy}$$



Qualidade das fórmulas de Green:

a) - O contorno L é cortado em duas de dois pontos por paralelos aos eixos.



$$\iint_A \frac{\partial F}{\partial y} dx dy =$$

$$= \iint_{A_1} \frac{\partial F}{\partial y} dx dy + \iint_{A_2} \frac{\partial F}{\partial y} dx dy$$

$$\iint_{A_1} = - \int_{L_1} dx \quad \iint_{A_2} = - \int_{L_2} dy$$

$$\begin{aligned} \iint_A &= - \left[\int_{L_1} dx + \int_{L_2} dy \right] = - \left[\int_{CDB} + \int_{DC} + \int_{BEC} + \int_{CB} \right] = \\ &= - \int_L dx \quad \text{c.f.p.} \end{aligned}$$

b) - A área não é simplesmente conexa.



$$\iint_A = \int_{BHHB} + \int_{BC} + \int_{CEDC} + \int_{CB} =$$

$$= + \iint_{A_2} \frac{\partial F}{\partial x} dx dy - \iint_{A_1} \frac{\partial F}{\partial x} dx dy =$$

$$= \iint_{A_2 - A_1} \frac{\partial F}{\partial x} dx dy = \iint_A \frac{\partial F}{\partial x} dx dy \quad \text{c.f.p.}$$

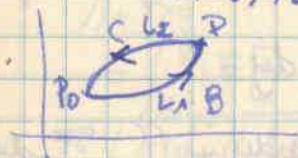
Teorema de Cauchy:

- Se em toda a área A e o contorno L que a limita o Pfaffiano $Pdx + Qdy$ é uma diferencial exacta o integral curvilíneo ao longo de L é nulo. (v. 3ª fórmula de Green).

Corolário:

- O integral curvilíneo ao longo dum caminho indo de A para B do pfaffiano numa região em que ele é uma diferencial exacta é sempre o mesmo, qualquer que seja o caminho considerado.

$$P_0(x_0, y_0) \longrightarrow P(x, y)$$



$$\int_L P dx + Q dy = \int_{L_1} - \int_{L_2} = 0$$

$$\int_{L_1} = \int_{L_2}$$

$$F(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P dx + Q dy = F(P)$$

Fundação da Física - Física

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

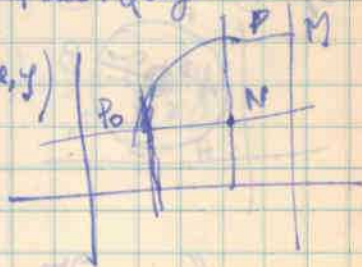
Supondo que este integral é pfaffiano diferencial exacto):

$$F(x, y) = \int_{P_0, P} P dx + Q dy = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P dx + Q dy$$

$$\Delta F = \int_{P_0, P} P dx + Q dy = \int_{x_0}^{x+h} P dx = h \cdot P(x, y)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{h} = P(x, y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = Q(x, y)$$

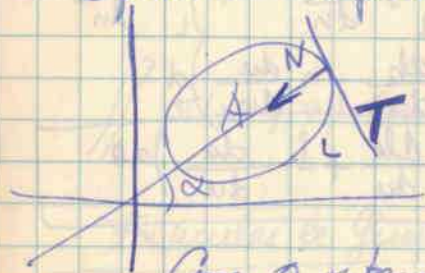


$$f = \int_{x_0}^x P(x, y) dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y) dy$$

Fórmulas de Green:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \rightarrow \text{laplaciano}$$

Quando o laplaciano é nulo e função diz-se harmônica.
Sejam $u(x,y)$ e $h(x,y)$
duas f. contínuas e admitindo
derivadas contínuas na área A .



Com o integral:

$$I = \iint_A \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(h \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] dx dy$$

$$I = \iint_A \left(\frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy + \iint_A h \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) dx dy$$

$$I = \int_L h \frac{\partial u}{\partial n} ds - h \frac{\partial u}{\partial y} dy = \int_L h \left(\frac{\partial u}{\partial x} dy - \frac{\partial u}{\partial y} dx \right)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{dy}{ds} = \cos \alpha \\ \frac{dx}{ds} = \sin \alpha \end{array} \right.$$

$$I = \int_L h \left(\frac{\partial u}{\partial x} dy - \frac{\partial u}{\partial y} dx \right) = \int_L h \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{dy}{ds} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dx}{ds} \right) ds$$

$$= \int_L h \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \sin \alpha \right) ds =$$

$$= - \int_L h \frac{du}{dn} ds$$

$$\iint_A \left(\frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy = - \int_L h \frac{du}{dn} ds -$$

$$- \iint_A h \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) dx dy =$$

$$= - \int_L h \frac{du}{dn} ds - \iint_A h \Delta u dx dy$$

$$\iint_A \left(\frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy =$$

$$= - \iint_A u \Delta h dx dy - \int_L u \frac{dh}{dn} ds$$

$$0 = \iint_A -u \Delta h dx dy + h \Delta u dx dy - \int_L u \frac{dh}{dn} ds + \int_L h \frac{du}{dn} ds =$$

$$\leftarrow \iint_A (h \Delta u - u \Delta h) dx dy - \int_L \left(u \frac{dh}{dn} - h \frac{du}{dn} \right) ds$$

$$\boxed{\iint_A (h \Delta u - u \Delta h) dx dy = \int_L \left(u \frac{dh}{dn} + h \frac{du}{dn} \right) ds}$$

Quando for $h = u$ é:

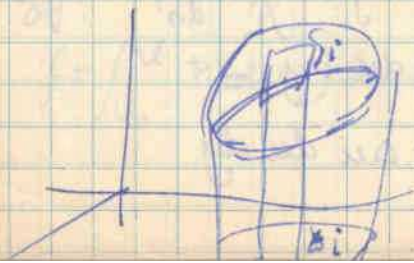
$$\iint_A \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy = \iint_A u \Delta u dx dy - \int_L u \frac{du}{dn} ds$$

Consequências das fórmulas de Green:

Teoremas: Se f é harmônica dentro de uma área A e é nula (ou tem valor constante) no contorno L da área e é identicamente ~~nula~~ nula em toda a área (ou é constante no interior da área).

Corolários: - Se duas funções são harmônicas dentro da mesma área A e se são iguais sobre o contorno (ou têm as mesmas derivadas normais sobre o contorno) a sua diferença é nula (ou é uma constante no interior das áreas).

Integrais de superfície:



$$S \rightarrow Z = f(x, y) \quad \begin{cases} z_1 = f_1(x, y) \\ z_2 = f_2(x, y) \end{cases}$$

Quando é contido
em 2 pontos
e paralela a OZ

$$\lim \sum_i F(x_i, y_i, z_i) \cos \delta_i S_i = \iint_S F(x, y, z) \cos \delta \, dS$$

$$\begin{aligned} &= Q \cdot \sum_i F[x_i, y_i, f(x_i, y_i)] S_i = \\ &= Q \cdot \sum_i f(x_i, y_i) = \iint_A f(x, y) \, du \, dy \end{aligned}$$

$$\iint_S F(x, y, z) \cos \delta \, dS = \iint_A F(x, y, f(x, y)) \, du \, dy$$

Fórmulas de Green:

$$\iiint_V \frac{\partial F}{\partial z} \, du \, dy \, dz = \iint_A \, du \, dy \left[f_z(x, y) \frac{\partial F}{\partial z} \right]_{f_1(x, y)}^{f_2(x, y)}$$

$$= \iint_A \left\{ F[x, y, f_z(x, y)] - F[x, y, f_1(x, y)] \right\} \, du \, dy$$

Fundação Cuidar o Futuro

As Sup. é interceptada por
— // e mais de 1 ponto é:

$$\begin{aligned} \iint_S F(x, y, z) \cos \delta \, dS &= \iint_A \left\{ F[x, y, f_2(x, y)] - \right. \\ &\quad \left. - F[x, y, f_1(x, y)] \right\} \, du \, dy \end{aligned}$$

$$\boxed{\iiint_V \frac{\partial F}{\partial z} \, du \, dy \, dz = \iint_S F(x, y, z) \cos \delta \, dS}$$

$$\iiint_V \frac{\partial F}{\partial x} \, du \, dy \, dz = \iint_S F(x, y, z) \cos \alpha \, dS$$

$$\iiint_V \frac{\partial F}{\partial y} \, du \, dy \, dz = \iint_S F(x, y, z) \cos \beta \, dS$$

Fórmula de Ostrogradsky:

$$\iiint_V \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) dx dy dz =$$

$$= \iint_S (X \cos \alpha + Y \cos \beta + Z \cos \gamma) dS$$

(em relação à semi-normal exterior).

Verifica-se ainda esta fórmula para o caso de superfície fechada que seja feita de dois pontos por paralelos aos eixos.



$$\iiint_V = \int_{V_1} + \int_{V_2}$$

$$\int_{V_1} = \int_{S_1} + \int_{S_2}$$

$$\int_{V_2} = \int_{S_2} + \int_{S_1}$$

$$\int_{S_1} = - \int_{S_2}$$

$$\int_V = \int_S \text{ c.g.p.}$$

Quando X, Y, Z são: $X = \frac{\partial u}{\partial x}$; $Y = \frac{\partial u}{\partial y}$;

$Z = \frac{\partial u}{\partial z}$, e:

$$\iiint_V \Delta u \, dx dy dz = \iint_S \frac{\partial u}{\partial n} dS$$

Fórmula de Green:

$$u(x, y, z)$$

$$w(x, y, z)$$

$$I = \iiint_V \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(w \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(w \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(w \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] dx dy dz$$

$$I = \iiint_V \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial z} \right) dx dy dz + \\ + \iiint_V w \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) dx dy dz$$

$$I = \iint_S \left(w \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + w \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + w \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma \right) dS = \\ = \iint_S w \frac{du}{dn} dS$$

$$\iiint_V \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial z} \right) dx dy dz = \\ = \iint_S w \frac{du}{dn} dS - \iiint_V w \Delta u dx dy dz$$

$$\iiint_V \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial z} \right) dx dy dz = \\ = \iint_S u \frac{dw}{dn} dS - \iiint_V u \Delta w dx dy dz$$

$$\iiint_V (w \Delta u - u \Delta w) dx dy dz = \iint_S \left(w \frac{du}{dn} - u \frac{dw}{dn} \right) dS$$

1) Quando $u = w$ e $\Delta u = \Delta w$:

$$\iint_S \left(w \frac{du}{dn} - u \frac{dw}{dn} \right) dS = 0$$

2) Quando $w = 1$:

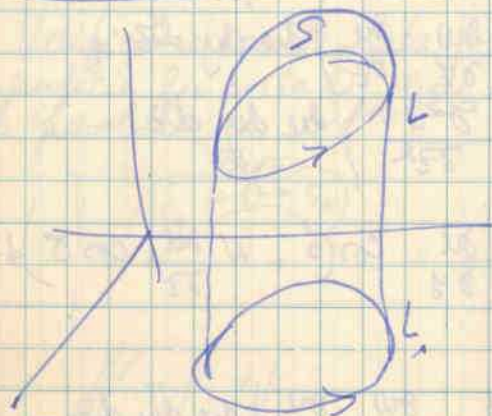
$$\iiint_V \Delta u dx dy dz = \iint_S \frac{du}{dn} dS$$

3) Quando $u = W e^i$:

$$\iiint_V \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] dx dy dz =$$

$$= \iiint_V u \Delta u dx dy dz + \iint_S u \frac{du}{dn} dS$$

Fórmula de Stokes:



$$\begin{aligned} X(u, y, z) \\ Y(u, y, z) \\ Z(u, y, z) \end{aligned}$$

$$S \rightarrow f(u, y, z) = 0$$

P = ~~Fundação~~ ~~Cuidar o Futuro~~

$$dz = p du + q dy$$

$$\begin{aligned} \int_L X du + Y dy + Z dz &= \int_L X du + Y dy + Z(p du + q dy) = \\ &= \int_{L_1} (X + pZ) du + (Y + qZ) dy = \\ &= \iint_A \left[\frac{\partial(Y + qZ)}{\partial u} - \frac{\partial(X + pZ)}{\partial y} \right] du dy = \\ &= \iint_A \left[\frac{\partial Y}{\partial u} + q \frac{\partial Z}{\partial u} - \frac{\partial X}{\partial y} - p \frac{\partial Z}{\partial y} \right] du dy = \\ &= \iint_A \left[\left(\frac{\partial Y}{\partial u} + \frac{\partial Y}{\partial z} p + \frac{\partial Z}{\partial u} q + q \left(\frac{\partial Z}{\partial u} p + \frac{\partial Z}{\partial z} p \right) \right) - \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial X}{\partial z} q + \frac{\partial Z}{\partial y} p + p \left(\frac{\partial Z}{\partial y} q + \frac{\partial Z}{\partial z} q \right) \right) \right] du dy = \end{aligned}$$

$$= \iint_A \left[\frac{\partial y}{\partial z} - \frac{\partial z}{\partial y} \right] p + \left(\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial x}{\partial g} \right) q + \left(\frac{\partial y}{\partial u} - \frac{\partial x}{\partial y} \right) r \, du \, dy =$$

$$= \iint_A \left[\left(\frac{\partial y}{\partial z} - \frac{\partial z}{\partial y} \right) p \cos \alpha + \left(\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial x}{\partial g} \right) q \cos \alpha + \left(\frac{\partial y}{\partial u} - \frac{\partial x}{\partial y} \right) r \cos \alpha \right] ds$$

$$p \cos \alpha = -\cos \alpha$$

$$q \cos \alpha = -\cos \alpha$$

$$\int_L x \, dx + y \, dy + z \, dz = \iint_A \left[\left(\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left(\frac{\partial x}{\partial g} - \frac{\partial z}{\partial u} \right) \cos \alpha + \left(\frac{\partial y}{\partial u} - \frac{\partial x}{\partial y} \right) \cos \alpha \right] ds$$

Queremos a Pfaffian é uma diferencial exata

$$\int_L x \, dx + y \, dy + z \, dz = 0$$

Fundação Cuidar o Futuro



Teorema do acréscimo finito:

$$\Delta f = \Delta u f'_u(u + \theta \Delta u, y + \Delta y) + \Delta y f'_y(u, y + \theta_1 \Delta y)$$

$$\Delta_x f = f(u + \Delta u, y) - f(u, y)$$

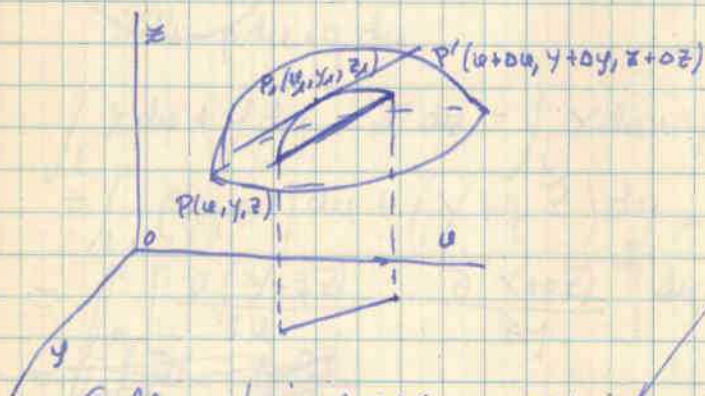
$$\Delta_x f = \Delta u f'_u(u + \theta \Delta u, y)$$

$$\begin{cases} f(u + \Delta u, y + \Delta y) - f(u, y + \Delta y) = \Delta u f'_u(u + \theta \Delta u, y + \Delta y) \\ + \Delta y f = f(u, y + \Delta y) - f(u, y) = \Delta y f'_y(u, y + \theta_1 \Delta y) \end{cases}$$

$$\Delta f = f(u + \Delta u, y + \Delta y) - f(u, y) = \Delta u f'_u(u + \theta \Delta u, y + \Delta y) - \Delta y f'_y(u, y + \theta_1 \Delta y)$$

$0 \leq \theta, \theta_1 \leq 1$

Vamos demonstrar que estas derivadas podem ser tomadas no mesmo ponto.



O plano proj. de PP' em Oxy intercepta Z , definindo uma curva contínua que pelo Teorema do acréscimo finito admite um ponto P_1 em que a tg é $\parallel$ à corda PP' . Isso é equivalente a dizer:

Portão basta provar que $P_1(u_1, y_1, z_1)$ satisfaz

$$\Delta f = \Delta u f'_u(u_1, y_1) + \Delta y f'_y(u_1, y_1)$$

Seja $Z = f(X, Y)$ a eq. do plano é:

$$\frac{X-u}{\Delta u} = \frac{Y-y}{\Delta y} = \lambda$$

ou: $X = u + \lambda \Delta u$

$Y = y + \lambda \Delta y$

onde: $\begin{cases} X = \phi(\lambda) \\ Y = \psi(\lambda) \end{cases}$

$Z = f(X, Y) = f(u + \lambda \Delta u, y + \lambda \Delta y) = \theta(\lambda)$

que é a equação da curva de interseção.

A equação da curva PP' é:

$$\frac{X-u}{\Delta u} = \frac{Y-y}{\Delta y} = \frac{Z-z}{\Delta z}$$

A equação da tangente em P , é:

$$\frac{X-u}{\frac{dX}{d\lambda}} = \frac{Y-y}{\frac{dY}{d\lambda}} = \frac{Z-z}{\frac{dZ}{d\lambda}}$$

que as derivadas tomadas no ponto $P, (u, y, z)$.

É:

$$\frac{dX}{d\lambda} = \Delta u, \quad \frac{dY}{d\lambda} = \Delta y$$

$$\left(\frac{dZ}{d\lambda} \right)_{(u,y,z)} = \frac{\partial Z}{\partial X} \frac{dX}{d\lambda} + \frac{\partial Z}{\partial Y} \frac{dY}{d\lambda} = \frac{\partial f}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y$$

Então:

A equação da tangente é:

$$\frac{X-u}{\Delta u} = \frac{Y-y}{\Delta y} = \frac{Z-z}{\frac{\partial f}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y}$$

Essas pela tangente os acréscimos Δu e Δy e a tangente são paralelos. Então:

$$\frac{\Delta u}{\Delta u} = \frac{\Delta y}{\Delta y} = \frac{\Delta z}{\frac{\partial f}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y}$$

$$\Delta z = \frac{\partial f}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y = \Delta u f'_u(u, y, z) + \Delta y f'_y(u, y, z)$$

a.s.p.m.

Exercícios:

1 - Se num ponto as derivadas parciais são contínuas finitas a função é contínua.

Seu:

$$\lim_{\Delta f=0} f(u+\Delta u, y+\Delta y) = f(u, y)$$

2 - Se num ponto as derivadas parciais são contínuas e logo finitas a diferença total é a soma da diferencial total com uma soma de infinitesimais de ordem superior à 1ª.

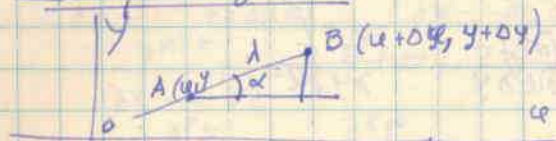
$$\left\{ \begin{array}{l} f'_u(u+\theta_1 \Delta u_1, u_2+\theta_2 \Delta u_2, \dots, u_n+\Delta u_n) = f'_u(\dots) + \epsilon_1 \\ f'_{u_2}(u_1+\theta_1 \Delta u_1, u_2+\theta_2 \Delta u_2, \dots) = f'_{u_2}(\dots) + \epsilon_2 \end{array} \right.$$

$$\Delta f = \Delta u_1 f'_u + \Delta u_2 f'_{u_2} + \dots + \Delta u_n f'_{u_n} + \epsilon_1 \Delta u_1 + \epsilon_2 \Delta u_2 + \dots$$

$$\Delta f = df + \epsilon_1 \Delta u_1 + \epsilon_2 \Delta u_2 + \dots$$
$$\frac{\Delta f}{\Delta t} = f'_u \frac{\Delta u_1}{\Delta t} + f'_{u_2} \frac{\Delta u_2}{\Delta t} + \dots + \left(\epsilon_1 \frac{\Delta u_1}{\Delta t} + \epsilon_2 \frac{\Delta u_2}{\Delta t} + \dots \right)$$

$$\frac{df}{dt} = f'_u \frac{du_1}{dt} + f'_{u_2} \frac{du_2}{dt} + \dots + \frac{df}{du_1} \frac{du_1}{dt}$$

Derivação direcional:



$$\frac{df}{d\lambda} = \lim_{\substack{\Delta u \rightarrow 0 \\ \Delta v \rightarrow 0}} \frac{f(u+\Delta u, v+\Delta v) - f(u, v)}{\sqrt{(\Delta u)^2 + (\Delta v)^2}} =$$

$$= \lim \frac{\Delta u f'_u + \Delta v f'_v}{\sqrt{(\Delta u)^2 + (\Delta v)^2}} =$$

$$= \lim \frac{\Delta u f'_u + \Delta v f'_v}{\Delta u \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta v}{\Delta u}\right)^2}} = \lim \left[\frac{f'_u}{\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta v}{\Delta u}\right)^2}} + \frac{\Delta v f'_v}{\Delta u \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta v}{\Delta u}\right)^2}} \right] =$$

$$= \lim \left[\frac{f'_u}{\sec \alpha} + \frac{\tan \alpha f'_v}{\sec \alpha} \right] =$$

$$\frac{df}{d\lambda} = \frac{df}{du} \cos \alpha + \frac{df}{dv} \sin \alpha$$

$$\frac{df}{d\lambda} = \lim_{\substack{\Delta u \rightarrow 0 \\ \Delta v \rightarrow 0 \\ \Delta z \rightarrow 0}} \frac{f(u+\Delta u, v+\Delta v, z+\Delta z) - f(u, v, z)}{\sqrt{(\Delta u)^2 + (\Delta v)^2 + (\Delta z)^2}} =$$

$$= \lim \frac{\Delta u f'_u + \Delta v f'_v + \Delta z f'_z}{\sqrt{(\Delta u)^2 + (\Delta v)^2 + (\Delta z)^2}}$$

$$\frac{df}{d\lambda} = \frac{\partial f}{\partial u} \cos(\hat{\lambda} \hat{u}) + \frac{\partial f}{\partial v} \cos(\hat{\lambda} \hat{v}) + \frac{\partial f}{\partial z} \cos(\hat{\lambda} \hat{z})$$

$$\frac{df}{d\hat{n}} = \frac{\partial f}{\partial u} \cos(\hat{n} \hat{u}) + \frac{\partial f}{\partial v} \cos(\hat{n} \hat{v}) + \frac{\partial f}{\partial z} \cos(\hat{n} \hat{z})$$

Teorema da inversão:

Se f for contínua e:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Seu:

$$\begin{aligned} \Delta_x f &= f(u + \Delta u, y) - f(u, y) = \Delta u f'_u(u + \theta_1 \Delta u, y) \\ f(u + \Delta u, y + \Delta y) - f(u, y + \Delta y) &= \Delta u f'_u(u + \theta_1 \Delta u, y + \theta_2 \Delta y) \\ f(u + \Delta u, y + \Delta y) - f(u, y + \Delta y) - f(u + \Delta u, y) + f(u, y) &= \\ &= \Delta u [f'_u(u + \theta_1 \Delta u, y + \theta_2 \Delta y) - f'_u(u + \theta_1 \Delta u, y)] = \\ &= \Delta u \Delta y f''_{uy}(u + \theta_1 \Delta u, y + \theta_2 \Delta y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_y f &= f(u, y + \Delta y) - f(u, y) = \Delta y f'_y(u, y + \theta_2 \Delta y) \\ f(u + \Delta u, y + \Delta y) - f(u + \Delta u, y) &= \Delta y f'_y(u + \theta_1 \Delta u, y + \theta_2 \Delta y) \\ f(u + \Delta u, y + \Delta y) - f(u + \Delta u, y) - f(u, y + \Delta y) + f(u, y) &= \\ &= \Delta y [f'_y(u + \theta_1 \Delta u, y + \theta_2 \Delta y) - f'_y(u, y + \theta_2 \Delta y)] = \\ &= \Delta y \Delta u f''_{yu}(u + \theta_1 \Delta u, y + \theta_2 \Delta y) \end{aligned}$$

$$f''_{uy}(u + \theta_1 \Delta u, y + \theta_2 \Delta y) = f''_{yu}(u + \theta_1 \Delta u, y + \theta_2 \Delta y)$$

$$\boxed{f''_{uy} = f''_{yu}}$$

$$\frac{\partial^m f}{\partial u \dots \partial z \partial u \partial v} = \frac{\partial^m}{\partial u \dots \partial z \partial u \partial v} F(u, v, z)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 F}{\partial v \partial u} \quad \text{c.f.p.}$$

$$\frac{\partial^m f}{\partial u \dots \partial z \partial u \partial v} = \frac{\partial^m}{\partial u \dots \partial z \partial u \partial v} F(u, \dots, z)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 F}{\partial v \partial u}$$

$$\frac{\partial^3 F}{\partial u \partial v \partial w} = \frac{\partial^3 F}{\partial v \partial u \partial w} \quad \text{c.p.}$$



Funções Homogêneas:

Teor. Euler:-

$$p f(u_1, u_2, \dots, u_n) = u_1 \frac{\partial f}{\partial u_1} + u_2 \frac{\partial f}{\partial u_2} + \dots + u_n \frac{\partial f}{\partial u_n}$$

Fundação Cuidar o Futuro

$$f(\lambda u_1, \lambda u_2, \dots, \lambda u_n) = \lambda^p f(u_1, \dots, u_n)$$

$$\frac{\partial f}{\partial (\lambda u_1)} \lambda u_1 + \frac{\partial f}{\partial (\lambda u_2)} \lambda u_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial (\lambda u_n)} \lambda u_n = p \lambda^{p-1} f(u_1, \dots, u_n)$$

$$\lambda = 1$$

$$\frac{\partial f(\lambda u_1, \dots, \lambda u_n)}{\partial (\lambda u_1)} \lambda u_1 + \frac{\partial f(\lambda u_1, \dots, \lambda u_n)}{\partial (\lambda u_2)} \lambda u_2 + \dots + \frac{\partial f(\lambda u_1, \dots, \lambda u_n)}{\partial (\lambda u_n)} \lambda u_n =$$

$$= p \lambda^p f(u_1, \dots, u_n)$$

$$\left(\frac{\partial f(\lambda u_1, \dots, \lambda u_n)}{\partial \lambda} \right)' =$$

$$= \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial (\lambda u_1)} \lambda u_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial (\lambda u_n)} \lambda u_n \right) \lambda^p - p \lambda^{p-1} f(\lambda u_1, \dots, \lambda u_n)}{\lambda^{2p}}$$

Teorema:

$$1 - f(u_1, \dots, u_n) = u_i^p \phi\left(\frac{u_1}{u_i}, \dots, \frac{u_n}{u_i}\right)$$

$$f(\lambda u_1, \dots, \lambda u_n) = \lambda^p f(u_1, \dots, u_n)$$

$$f\left(u_1, \frac{u_2}{u_1}, \dots, \frac{u_n}{u_1}\right) = \frac{1}{u_1^p} f(u_1, \dots, u_n)$$

$$f(u_1, \dots, u_n) = u_i^p \phi\left(\frac{u_1}{u_i}, \dots, \frac{u_n}{u_i}\right)$$

$$\begin{aligned} f(\lambda u_1, \dots, \lambda u_n) &= \lambda^p u_i^p \phi\left(\frac{\lambda u_1}{\lambda u_i}, \dots, \frac{\lambda u_n}{\lambda u_i}\right) = \\ &= \lambda^p f(u_1, \dots, u_n) \end{aligned}$$

2 - As derivadas parciais são funções homogêneas de grau $p-1$.

$$\frac{f(\lambda u_1, \dots, \lambda u_n)}{\frac{\partial f(\lambda u_1, \dots, \lambda u_n)}{\partial u_i}} = \lambda^p \frac{f(u_1, \dots, u_n)}{\lambda \frac{\partial f(u_1, \dots, u_n)}{\partial u_i}}$$

$$\frac{\frac{\partial f(\lambda u_1, \dots, \lambda u_n)}{\partial u_i}}{\frac{\partial f(\lambda u_1, \dots, \lambda u_n)}{\partial u_1}} = \lambda^{p-1} \frac{\frac{\partial f(u_1, \dots, u_n)}{\partial u_i}}{\frac{\partial f(u_1, \dots, u_n)}{\partial u_1}}$$

Funções implícitas:

Teoremas de existência:



i-
a)
$$\begin{cases} u_1 = a_1 + \Delta u_1 \\ u_2 = a_2 + \Delta u_2 \\ u_n = a_n + \Delta u_n \end{cases}$$
$$\begin{aligned} |\Delta u_1| &= |u_1 - a_1| < \varepsilon \\ |\Delta u_2| &= |u_2 - a_2| < \varepsilon \\ |\Delta u_n| &= |u_n - a_n| < \varepsilon \\ |\Delta y| &= |y_n - a_n| < \varepsilon \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(u_1, u_2, \dots, u_n, y) &= f(a_1 + \Delta u_1, a_2 + \Delta u_2, \dots, a_n + \Delta u_n, b + \Delta y) = \\ &= f(a_1, a_2, \dots, a_n, b) + \Delta u_1 f'_{u_1} + \Delta u_2 f'_{u_2} + \dots + \Delta u_n f'_{u_n} + \Delta y f'_y \end{aligned}$$

$$|f'_{u_1}| < A$$

$$|f'_{u_n}| < A$$

$$|f'_y| > B > 0$$

$$|\Delta u_1 f'_{u_1} + \Delta u_2 f'_{u_2} + \dots + \Delta u_n f'_{u_n}| < \Delta y f'_y$$

$$A [|\Delta u_1| + |\Delta u_2| + \dots + |\Delta u_n|] < |\Delta y| B$$

$$|\Delta u_1| \varepsilon' \quad \text{c.g.p.} \quad < \frac{|\Delta y| B}{A}$$

b) $\varepsilon' = \frac{|\Delta y| B}{A}$
$$\begin{cases} u'_1 = a_1 + \Delta u'_1 \\ u'_n = a_n + \Delta u'_n \end{cases}$$

$$f(u'_1, u'_2, \dots, u'_n, y) = \Delta u'_1 f'_{u_1} + \dots + \Delta u'_n f'_{u_n} + \Delta y f'_y$$

c) Derivada:

$$\begin{aligned} f(u_1 + \Delta u_1, u_2, u_3, \dots, y + \Delta y) &= f(u_1, u_2, \dots, y) + \\ &+ \Delta u_1 f'_{u_1} + \Delta y f'_y = 0 \\ \frac{\Delta y}{\Delta u_1} &= - \frac{f'_{u_1}}{f'_y} \end{aligned}$$

$$3^o - \begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) = 0 \\ f_x = 0 \\ f_n = 0 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial y_n} \end{vmatrix} \geq 0$$

matriz de 2ª classe $\Delta_1 \geq 0$.

$$\begin{cases} f_2 = 0 \\ f_n = 0 \end{cases}$$

definir as $(n-1)$ funções:

$$f_1 = 0 \rightarrow F(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y_1} = \frac{\partial f_1}{\partial y_1} + \frac{\partial f_2}{\partial y_1} + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial y_1} = 0$$

$$0 = \frac{\partial f_1}{\partial y_1} + \frac{\partial f_2}{\partial y_1} + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial y_1}$$

n eq. e $(n-1)$ inc.

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \frac{\partial f_1}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1} & \frac{\partial f_2}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial y_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial y_1} & \frac{\partial f_n}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial y_n} \end{vmatrix} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y_1} \Delta_1 - \Delta = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y_1} = \frac{\Delta}{\Delta_1} \geq 0$$

$$y_1 = \varphi(u_1, u_2, \dots, u_p)$$



Princípio de independência funcional:

$$\begin{cases} y_1 = f_1(u_1, u_2, \dots, u_p) \\ y_2 = f_2(u_1, u_2, \dots, u_p) \\ \vdots \\ y_k = f_k(u_1, u_2, \dots, u_p) \\ y_n = f_n(u_1, u_2, \dots, u_p) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_k = f_k(u_1, u_2, \dots, u_p) \\ y_n = f_n(u_1, u_2, \dots, u_p) \end{cases} \quad \Delta(k) \geq 0 = \frac{\partial(y_1 - y_k)}{\partial(u_1 - u_p)}$$

$$\begin{cases} y_k = f_k(u_1, u_2, \dots, u_p) \\ y_n = f_n(u_1, u_2, \dots, u_p) \end{cases} \quad \begin{aligned} (u_1, u_2, \dots, u_k) &= \varphi(u_{k+1}, u_p, y_1, \dots, y_k) \\ (y_{k+1}, \dots, y_n) &= \psi(u_{k+1} - u_p, y_1 - y_k) \end{aligned}$$

Notações:

$$\begin{cases} y = f(u_1, u_2, \dots, u_n) \\ y_1 = \frac{\partial f}{\partial u_1} \\ y_2 = \frac{\partial f}{\partial u_2} \\ \vdots \\ y_n = \frac{\partial f}{\partial u_n} \end{cases}$$

$$u_1 = a_1 t + b_1 t + \dots$$

$$u_2 = a_2 t + b_2 t + \dots$$

$$\frac{\partial(y_1 - y_2)}{\partial(t_1 - t_2)} = M \quad \frac{\partial(y_1 - y_2)}{\partial(t_1 - t_2)}$$

$$\frac{\partial y}{\partial t_1} = \frac{\partial y}{\partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial t_1} + \frac{\partial y}{\partial u_2} \frac{\partial u_2}{\partial t_1}$$

$$\frac{\partial y}{\partial t_2} = \frac{\partial y}{\partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial t_2} + \frac{\partial y}{\partial u_2} \frac{\partial u_2}{\partial t_2}$$

$$\frac{\partial y}{\partial t_1} = a_1 y_1 + a_2 y_2 + \dots$$

$$\frac{\partial y}{\partial t_2} = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \dots$$

$$H_y = M / \frac{\partial(y_1 - y_2)}{\partial(t_1 - t_2)} = M \cdot \frac{\partial(y_1 - y_2)}{\partial(t_1 - t_2)} =$$

Fundação Guindar o Futuro

Determinantes funcionais (como só linear)

A derivada do determinante é igual à soma dos determinantes que se obtêm derivando sucessivamente cada uma das suas filas.

$$\Delta = \sum_{ik} a_{ik} A_{ik}$$

$$\frac{\partial \Delta}{\partial a_{in}} = A_{in}$$

$$\frac{d\Delta}{da} = \sum_{ik} \frac{\partial \Delta}{\partial a_{ik}} \frac{da_{ik}}{da} = \sum_{ik} A_{ik} \frac{da_{ik}}{da} =$$

$$= \sum_i \left(\sum_k \frac{da_{ik}}{da} A_{ik} \right)$$

Teorema de Rano: — Se o sistema for idênticamente nulo em todos os pontos do intervalo (a, b) e se em ponto algum deste intervalo se anularem simultaneamente os complementos algébricos dos elementos da última linha, existe, nesse intervalo, entre as funções da sistema, uma relação linear e homogênea de coeficientes constantes, dos todos nulos.

Seu:

$w_1, w_2, \dots, w_n$ — comp. alg. dos elementos da última linha
 $v_1, v_2, \dots, v_n$ — " " " " " de penúltima "

$$W_i = + \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_{i-1} & y_{i+1} & \dots & y_n \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \dots & y_{i-1}^{(n-2)} & y_{i+1}^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \end{vmatrix}$$

$$V_i = + \begin{vmatrix} y_1 & \dots & y_{i-1} & y_{i+1} & \dots & y_n \\ y_1^{(n-3)} & \dots & y_{i-1}^{(n-3)} & y_{i+1}^{(n-3)} & \dots & y_n^{(n-3)} \end{vmatrix}$$

$$W_i = -V_i$$

$$W = 0$$

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{v_1}{v_2}$$

$$\frac{w_1 w_2'}{w_2 w_1'} = \frac{v_1 v_2'}{v_2 v_1'}$$

$$\frac{w_1^2}{w_2^2} = \frac{v_1^2}{v_2^2}$$

$$\frac{w_1^2 w_2' + w_2^2 w_1'}{w_1^2 + w_2^2} = \frac{v_1^2 v_2' + v_2^2 v_1'}{v_1^2 + v_2^2} = \lambda$$

$$\frac{w_1 w_2' + w_2 w_1'}{w_1^2 + w_2^2} = \frac{v_1 v_2' + v_2 v_1'}{v_1^2 + v_2^2} = \lambda$$

$$\frac{w_1 w_2' + w_2 w_1'}{w_1^2 + w_2^2} = \frac{v_1 v_2' + v_2 v_1'}{v_1^2 + v_2^2} = \lambda$$

$$\frac{w_1 w_2' + w_2 w_1'}{w_1^2 + w_2^2} = \frac{v_1 v_2' + v_2 v_1'}{v_1^2 + v_2^2} = \lambda$$

$$\frac{w_1 w_2' + w_2 w_1'}{w_1^2 + w_2^2} = \frac{v_1 v_2' + v_2 v_1'}{v_1^2 + v_2^2} = \lambda$$

$$\frac{w_1 w_2' + w_2 w_1'}{w_1^2 + w_2^2} = \frac{v_1 v_2' + v_2 v_1'}{v_1^2 + v_2^2} = \lambda$$

$$\frac{w_1 w_2' + w_2 w_1'}{w_1^2 + w_2^2} = \frac{v_1 v_2' + v_2 v_1'}{v_1^2 + v_2^2} = \lambda$$

$$\frac{w_1 w_2' + w_2 w_1'}{w_1^2 + w_2^2} = \frac{v_1 v_2' + v_2 v_1'}{v_1^2 + v_2^2} = \lambda$$

$$\begin{cases} \lambda w_1' - \lambda' w = 0 \\ \lambda w_n' - \lambda' w_n = 0 \\ \left(\frac{w_i}{\lambda} \right)' = \frac{\lambda w_i' - \lambda' w_i}{\lambda^2} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} w_1' &= \lambda a_1 \\ w_1' y_1 + w_2' y_2 + \dots &= 0 \\ \lambda (a_1 y_1 + a_2 y_2 + \dots) &= 0 \end{aligned}$$



Fundação Cuidar o Futuro

Integral de Lebesgue:

$$\text{se } \sup \sum y_i DF(y_i)$$

$$\text{se } \inf \sum y_i DF(y_i)$$

$$(y_{i-1}, y_i)$$

$$y_{i-1} DF(y_i) = y_{i-1} [F(y_i) - F(y_{i-1})]$$

$$y_{i-1} [F(\lambda) - F(y_{i-1})] + \lambda [F(y_i) - F(\lambda)]$$

$$y_{i-1} [F(\lambda) - F(y_{i-1})] + \lambda [F(y_i) - F(\lambda)] > y_{i-1} [F(\lambda) - F(y_{i-1})] +$$

$$+ y_{i-1} [F(y_i) - F(\lambda)] > y_{i-1} [F(y_i) - F(y_{i-1})]$$

$$y_i DF(y_i) = y_i [F(y_i) - F(y_{i-1})] > y_i [F(y_i) - F(\lambda)] + \lambda [F(\lambda) - F(y_{i-1})]$$

$$z = f(u, y) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial z}{\partial u} = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{array} \right. = 0$$

$$\lim \sum f(P) \Delta V = \lim \sum f(u_i, y_i, z_i) \rho_i (z_{i+1} - z_i) =$$

$$= \lim \sum \rho_i \phi(u, y, z) = \int \rho_i \phi(u, y, z) dV =$$

$$= \int \left\{ \begin{array}{l} y = f(u) \\ z = f(u) \end{array} \right.$$

$$f(u) = \int_0^{u^2} \arctg \frac{u}{u^2} du$$

$$f'(u) = \int_0^{u^2} \frac{-\frac{2u}{u^2}}{1 + \left(\frac{u}{u^2}\right)^2} du + \arctg \frac{u}{u^2} \cdot 2u =$$

$$= \int_0^{u^2} -\frac{2u u}{u^4 + u^2} du + \frac{\pi}{4} \cdot 2u = \frac{\pi}{4} - \frac{u}{u^2} [u^4 + u^2]_0^{u^2} +$$

$$+ \frac{\pi}{2} \cdot u = -u(u^4 + u^2) + u(u^4) + \frac{\pi}{2} \cdot u = 0$$

$$u = 0$$

$$-u^5 - u^3 + u^5 + \frac{\pi}{2} = 0$$

$$u = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

$$f(u, y)$$

$$u = u_0 + t(u - u_0)$$

$$v = y_0 + t(y - y_0)$$

$$f(u, v) = F(t)$$

$$F'(t) = \frac{\partial F}{\partial u} (u - u_0) + \frac{\partial F}{\partial v} (y - y_0)$$

$$F^{(n)}(t) = \left[\frac{\partial^n F}{\partial u^n} (u - u_0)^n + \frac{\partial^n F}{\partial v^n} (y - y_0)^n \right]^{(n)}$$

$$f(u, v) = F(t) = F(0) + t F'(0) + \frac{t^2}{2!} F''(0) + \dots + R_n$$

$$R_n = \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(0t)$$

$$t = 0$$

$$u = u_0, v = y_0$$

$$F'(0) = \frac{\partial F}{\partial u_0} (u - u_0) + \frac{\partial F}{\partial v} (y - y_0)$$

$$F^{(n)}(0) = \left[\frac{\partial^n F}{\partial u^n} (u - u_0)^n + \frac{\partial^n F}{\partial v^n} (y - y_0)^n \right]^{(n)}$$

$$t = 1$$

$$f(u, y) = F(u_0, y_0) + \left[\frac{\partial F}{\partial u_0} (u - u_0) + \frac{\partial F}{\partial y_0} (y - y_0) \right] t$$

$$+$$

$$t = \theta t \rightarrow u_1 = u_0 + \theta t (u - u_0)$$

$$v_1 = y_0 + \theta t (y - y_0)$$

$$R_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} \left[\frac{\partial^{n+1} F}{\partial u^{n+1}} (u - u_0)^{n+1} + \frac{\partial^{n+1} F}{\partial v^{n+1}} (y - y_0)^{n+1} \right]^{(n+1)}$$

$$f(u, y) = f(u_0, y_0) + \sum_{i=0}^{i=n} \frac{1}{i!} \left[\frac{\partial^i F}{\partial u^i} (u - u_0)^i + \frac{\partial^i F}{\partial y^i} (y - y_0)^i \right]^{(i)}$$

$$f(u) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(z) dz}{(z-u)}$$

$$\int_{L-L_1} \frac{f(z) dz}{z-u} = 0$$

$$\int_L \frac{f(z) dz}{z-u} = \int_{L_1} \frac{f(z) dz}{(z-u)} \quad f(z) = f(u) + \epsilon$$

$$\begin{aligned} \int_{L_1} \frac{f(z) dz}{(z-u)} &= \int_{L_1} \frac{f(u) dz}{z-u} + \int_{L_1} \frac{\epsilon dz}{z-u} = \\ &= f(u) \int_{L_1} \frac{dz}{z-u} + \int_{L_1} \frac{\epsilon dz}{z-u} \end{aligned}$$

$$z-u = \rho e^{i\theta}$$

$$dz = \rho e^{i\theta} i d\theta$$

$$v = f(u) \int_0^{2\pi} \frac{\rho e^{i\theta} i d\theta}{\rho e^{i\theta}} + \int_0^{2\pi} \frac{\epsilon \rho e^{i\theta} i d\theta}{\rho e^{i\theta}} =$$

$$= 2\pi i f(u) + i \int_0^{2\pi} \epsilon d\theta$$

$$I = \int_0^{2\pi} \epsilon d\theta \quad \text{Futuro} \quad \int_0^{2\pi} \epsilon d\theta = 2\pi \epsilon$$

$$\rho \rightarrow 0, \quad \epsilon \rightarrow 0, \quad I \rightarrow 0$$

$$I = \int_L \frac{f(z) dz}{z-u} - 2\pi i f(u)$$

$$f(u) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(z) dz}{z-u}$$

$$\Delta f = f(u+h) - f(u) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \left(\frac{1}{z-u-h} - \frac{1}{z-u} \right) f(z) dz$$

$$\frac{1}{z-u-h} = \frac{1}{z-u} + \frac{h}{(z-u)^2} + \frac{h^2}{(z-u)^3} + \frac{h^3}{(z-u)^4} + \dots$$

$$v = \frac{1}{2\pi i} \int_L \left(\frac{h}{(z-u)^2} + \frac{h^2}{(z-u)^3} + \dots \right) f(z) dz$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{h} = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(z) dz}{(z-u)^2} = 0$$

$$f^{(n)}(u) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z) dz}{(z-u)^{n+1}}$$

$$f(u) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z) dz}{(z-u)}$$

$$\frac{1}{z-u} = \frac{1}{(z-a)-(u-a)} = \frac{1}{(z-a)} + \frac{(u-a)}{(z-a)^2} + \frac{(u-a)^2}{(z-a)^3} + \dots + \frac{(u-a)^n}{(z-a)^{n+1}} + \frac{(z-a)^n (z-u)}{(z-a)^{n+1}}$$

$$\begin{aligned} f(u) &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z) dz}{z-a} + \frac{u-a}{2\pi i} \int_C \frac{f(z) dz}{(z-a)^2} + \dots \\ &+ \frac{(u-a)^n}{2\pi i} \int_C \frac{f(z) dz}{(z-a)^{n+1}} + \frac{(z-a)^n (z-u)}{(z-a)^{n+1}} \\ &= f(a) + (u-a) f'(a) + \frac{(u-a)^2}{2!} f''(a) + \dots \\ &+ \frac{(u-a)^n}{2\pi i} \int_C \frac{f(z) dz}{(z-a)^{n+1}} \end{aligned}$$

$$f(u) = A_0 + A_1(u-a) + A_2(u-a)^2 + \dots$$

$$f(u) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z) dz}{z-u}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z) dz}{z-u} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z) dz}{z-a}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z) dz}{u-z}$$

$$\frac{1}{(u-a)(z-a)} = \frac{1}{(u-a)} + \frac{(z-a)}{(u-a)^2} + \frac{(z-a)^2}{(u-a)^3} + \dots$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z) dz}{(u-a)} + \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z) dz}{(u-a)^2} + \dots$$

$$A_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

$$f\left(\frac{1}{z'}\right) = A_0 + A_1 z' + A_2 z'^2 + \dots$$

$$f(z) = A_0' + \frac{A_1'}{z} + \frac{A_2'}{z^2} + \dots$$

$$\times \quad f(z) = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \dots$$

$$A_0 = A_0' \quad A_1 = A_1' = A_2 = \dots = 0$$

$$f\left(\frac{1}{z'}\right) = \frac{A_1'}{z'} + \frac{A_2'}{z'^2} + \dots + \frac{A_n'}{z'^n} + B_0 + B_1 z' + \dots$$

$$\times \quad f(z) = A_1' z + A_2' z^2 + \dots + A_n' z^n + \frac{B_0}{z} + \frac{B_1}{z^2} + \dots$$

$$A_0 = B_0 \quad A_1' = A_1 \quad A_n = B_n = 0$$

Fundação Cuidar o Futuro



3.ª frequência de Cálculo integral e das variações

Curvas torsas:

Equações paramétricas da curva: $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases}$

Equações vetoriais (eliminando t): $\begin{cases} y=y(u) \\ z=z(u) \end{cases}$

Equações não vetoriais: $\begin{cases} f(u, y, z) = 0 \\ f_1(u, y, z) = 0 \end{cases}$

Equações polares: $\begin{cases} f(\rho, \theta, \phi) = 0 \\ F(\rho, \theta, \phi) = 0 \end{cases}$

Grandezas notáveis nas curvas: (em cálculo vetorial)

1) Diferencial de arco:

$$ds = \text{mod } dP$$

$P \rightarrow P + dP$ sobre S

$$dP = dx \mathbf{i} + dy \mathbf{j} + dz \mathbf{k}$$

$$ds = \text{mod } dP = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} dt$$

$$S = \int_{t_0}^t \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} dt$$

2) Tangente:

$$T = \frac{dP}{ds}$$

Vetor unitário dirigido segundo a tangente à curva no ponto P em consideração, pois (teorema deriv. fun. 1):

$$P(t+h) - P(t) = h \frac{dP(t+h)}{dt}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{P(t+h) - P(t)}{h} = \frac{dP}{dt} = \frac{dP}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = T \frac{ds}{dt}$$

T tem a mesma direcção da secante $\frac{P(t+h) - P(t)}{h}$, quando $h \rightarrow 0$, i.e., a $h \rightarrow 0$.

O que resulta é o vector unitário tangente à curva, que substitui os vectores dos elementos Keplerianos.

3) Normal principal:

$$N = \frac{\frac{dT}{ds}}{\text{mod } \frac{dT}{ds}}$$

$$E' T/T=1 \rightarrow \frac{dT}{ds} / T=0$$

$$1) \frac{dT}{ds} \perp T \therefore N \perp T$$

$$2) \frac{dT}{ds} = 0 \rightarrow T = C.t \rightarrow \text{a curva é retilínea}$$

4) Curvatura de flexão:

$$\frac{1}{\rho} = \text{mod } \frac{dT}{ds}$$

$\rho \rightarrow$ raio de curvatura

5) Bivectorial:

$$B = T \wedge N$$

vetor unitário



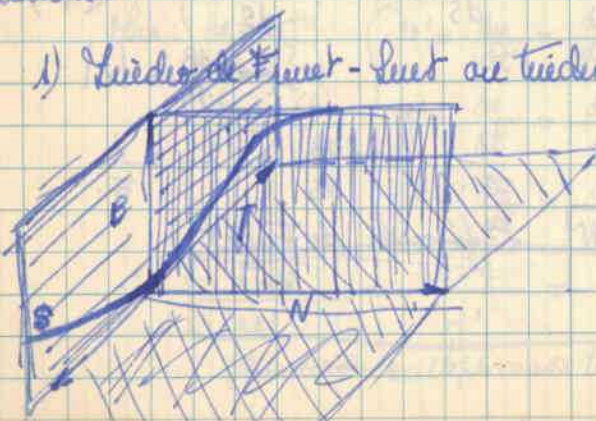
6) Curvatura de torção:

$$\frac{1}{\sigma} = \pm \text{mod } \frac{dB}{ds}$$

$\sigma \rightarrow$ raio de torção

Das 6 entidades principais derivam outras que passamos a estudar:

1) Triângulo de Frenet-Serret ou triângulo intrínseco:



$TN \rightarrow$ plano osculador

$BN \rightarrow$ plano normal

$BT \rightarrow$ plano rectificante

2) Centro de curvatura:

$C = P + \rho N$ correspondente ao ponto P e existente sobre a normal N .

$(C - P) \parallel N$ (sempre positivo $\rho > 0$) e igual a ρ em intensidade.

3) Fórmulas de Frenet:

Dêmos as derivadas de T , B e N em relação ao arco, s .

A) Da normal principal: $N = \frac{dT/ds}{\|dT/ds\|}$

Da curvatura de flexão: $\frac{1}{\rho} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{dT}{ds}$

temos: $\boxed{\frac{dT}{ds} = \frac{1}{\rho} N}$ 1.ª fórmula de Frenet

B) $B/B = 1 \rightarrow \frac{dB}{ds} / B = 0 \rightarrow$ 1) $B \cdot \frac{1}{B} \rightarrow \frac{dB}{ds} = 0 \rightarrow$ (v. ad.)

$B/T = 0 \rightarrow \frac{dB}{ds} / T + \frac{dT}{ds} / B = 0 \rightarrow \frac{dB}{ds} / T + \frac{1}{\rho} B/N = 0$

$B/N = 0 \rightarrow \frac{dB}{ds} / T = 0$

$\therefore \begin{cases} \frac{dB}{ds} / B = 0 \\ \frac{dB}{ds} / T = 0 \end{cases} \rightarrow \frac{dB}{ds} \parallel N ; \frac{dB}{ds} = \lambda N \quad (\lambda \neq 0)$

$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{dB}{ds} = |\lambda|$

$\frac{1}{\rho} = \pm \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{dB}{ds} \quad \lambda = \pm \frac{1}{\rho}$

$\boxed{\frac{dB}{ds} = \frac{1}{\rho} N}$

2.ª fórmula de Frenet

$$c) N = BAT \rightarrow \frac{dN}{ds} = \frac{dB}{ds} AT + B A \frac{dT}{ds}$$

$$\frac{dN}{ds} = \frac{1}{\rho} N AT + \frac{1}{\rho} B AN$$

$$\boxed{\frac{dN}{ds} = -\frac{1}{\rho} T - \frac{1}{\rho} B} \quad \text{3.ª fórmula de Freest}$$

Nota: - Quando sup. $\frac{dB}{ds} = 0$; $B = c.t^a \rightarrow T$ e N são const. t^a // π qto
que dige a curva é uma curva plana.

A grandeza de $\frac{dN}{ds}$ não é distribuída nas curvaturas de flexão e. pois, antes está ligada pelas relações:

$$\left(\text{mod } \frac{dN}{ds} \right)^2 = \frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{\sigma^2}$$

Suspensão catenária de todas estas equações:

1) Tangente:

$$P = 0 + e + g \rightarrow \text{de } T + dy + dz$$

$$T = \frac{dx}{ds} I + \frac{dy}{ds} J + \frac{dz}{ds} K$$

$$a // T \rightarrow \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

$$\therefore \frac{X-x}{\frac{dx}{ds}} = \frac{Y-y}{\frac{dy}{ds}} = \frac{Z-z}{\frac{dz}{ds}} \quad \text{em um ponto } P(x, y, z)$$

$$\text{Mas: } \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad \begin{cases} x' = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{ds} \frac{ds}{dt} \\ y' = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{ds} \frac{ds}{dt} \\ z' = \frac{dz}{dt} = \frac{dz}{ds} \frac{ds}{dt} \end{cases}$$

$$\therefore \boxed{\frac{X-x}{x'} = \frac{Y-y}{y'} = \frac{Z-z}{z'}}$$

(dividindo multiplicando tudo por $s' = \frac{ds}{dt}$)

2) Plano normal:

Como é normal a T em cada ponto será como é lógico:

$$(X-u)u' + (Y-y)y' + (Z-z)z' = 0$$

3) Plano osculador:

A) Com. aq em $P(t)$ e a curvatura P'' def. por $P(t)$ e $P_1(t+h)$; plano osculador à curva em $P(t)$ é o plano def. por estas duas rectas quando $P_1 \rightarrow P$ ou a curvatura para a 2ª...

$$\begin{vmatrix} X-u & Y-y & Z-z \\ u' & y' & z' \\ \Delta u & \Delta y & \Delta z \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} \Delta u = h u'(t+\theta h) \\ \Delta y = h y'(t+\theta h) \\ \Delta z = h z'(t+\theta h) \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} X-u & Y-y & Z-z \\ u'(t) & y'(t) & z'(t) \\ u'(t+\theta h) - u'(t) & y'(t+\theta h) - y'(t) & z'(t+\theta h) - z'(t) \end{vmatrix} = 0$$

e finalmente temos a equação do plano osculador:

$$\begin{vmatrix} X-u & Y-y & Z-z \\ u' & y' & z' \\ u'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = 0$$

B) Vamos chegar a esta mesma expressão partindo do cálculo vetorial

$$E = \frac{dT}{ds} = \frac{1}{\rho} \cdot N$$

$$T = \frac{dx}{ds} I + \frac{dy}{ds} J + \frac{dz}{ds} K$$

$$N = \rho \left(\frac{d^2x}{ds^2} I + \frac{d^2y}{ds^2} J + \frac{d^2z}{ds^2} K \right)$$

para o plano osculador e def. por $T_P N$:

$$\begin{vmatrix} X-u & Y-y & Z-z \\ \frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds} & \frac{dz}{ds} \\ \frac{d^2x}{ds^2} & \frac{d^2y}{ds^2} & \frac{d^2z}{ds^2} \end{vmatrix} = 0$$



Ass:
$$\begin{cases} \frac{d^2x}{ds^2} = \frac{d}{ds} \left(\frac{dx}{ds} \right) = \frac{d}{ds} \frac{\frac{dx}{dt}}{\frac{ds}{dt}} = \frac{d}{ds} \left(\frac{u'}{s'} \right) = \frac{u''s' - s''u'}{s'^2} \\ \frac{d^2y}{ds^2} = \frac{y''s' - s''y'}{s'^2} \\ \frac{d^2z}{ds^2} = \frac{z''s' - s''z'}{s'^2} \end{cases}$$

Logo:

$$\begin{vmatrix} X-u & Y-y & Z-z \\ u' & y' & z' \\ u''s' - u's'' & y''s' - y's'' & z''s' - z's'' \end{vmatrix} = 0$$

Somando 3.ª linha a 2.ª linha e dividindo tudo por s'^2 , temos:

$$\begin{vmatrix} X-u & Y-y & Z-z \\ u' & y' & z' \\ u'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = 0$$

C.f.p.

Alternativamente podemos escrever:

$$A(X-u) + B(Y-y) + C(Z-z) = 0 \rightarrow \text{plano osculador}$$

Logo que:

$$\begin{cases} A = y'z'' - z'y'' \\ B = z'u'' - u'z'' \\ C = u'y'' - y'u'' \end{cases}$$

c) Mitoz outros caminhos:

Cons. P curva curva e as tgs. a $P \in P$, vizinho de P , temos
 em P 1.ª tg P , o plano def. pela tg P e pela $\frac{d^2P}{ds^2}$ formando $P \rightarrow P$

é o plano osculador à curva no ponto P .

$$\text{Seja } A(x-u) + B(y-y) + C(z-z) = 0 \quad (\text{v. det. } A, B, C)$$

$\pi \parallel \{P \parallel \pi_P\}$:

$$\begin{cases} A u'(t) + B y'(t) + C z'(t) = 0 \\ A(u'(t+\Delta t) - u'(t)) + B(y'(t+\Delta t) - y'(t)) + C(z'(t+\Delta t) - z'(t)) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A u'(t) + B y'(t) + C z'(t) = 0 \\ A(u'(t+\Delta t) - u'(t)) + B(y'(t+\Delta t) - y'(t)) + C(z'(t+\Delta t) - z'(t)) = 0 \end{cases}$$

O plano é def. por:

$$\begin{vmatrix} x-u & y-y & z-z \\ u'(t) & y'(t) & z'(t) \\ u'(t+\Delta t) & y'(t+\Delta t) & z'(t+\Delta t) \end{vmatrix} = 0$$

ou:

$$\begin{vmatrix} x-u & y-y & z-z \\ u'(t) & y'(t) & z'(t) \\ u''(t+\Delta t) & y''(t+\Delta t) & z''(t+\Delta t) \end{vmatrix} = 0$$

Na passagem ao limite, tem:

$$\begin{vmatrix} x-u & y-y & z-z \\ u' & y' & z' \\ u'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = 0$$

c.f.p.

4) Bilinear:

$\pi \perp \text{pl. osc.}$:

$$\frac{x-u}{A} = \frac{y-y}{B} = \frac{z-z}{C}$$

5) Normal principal:

Se a interseção do pl. normal e osc.:

$$\begin{cases} (x-u)u' + (y-y)y' + (z-z)z' = 0 \\ A(x-u) + B(y-y) + C(z-z) = 0 \end{cases}$$

$$\frac{x-u}{Bz' - Cy'} = \frac{y-y}{Cu' - Az'} = \frac{z-z}{Ay' - Bx'}$$

6) Plano retificador:

β' 1 normal principal:

$$(Bz' - cy')(x - u) + (cu' - Az')(y - v) + (Ay' - Bz')(z - \delta) = 0$$

*) Curvatura

A) Def.: Dado $P \in P$, e 3/4s estas fazemos 1 curv. ang. $\Delta\theta$; seja $\Delta S = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$; a curvatura em P é: $\lim_{P_1 \rightarrow P} \frac{\Delta\theta}{\Delta S} = \frac{1}{\rho}$

$$T = \frac{d}{ds} P \rightarrow T = \alpha I + \beta J + \gamma K$$

$$T_1 = \frac{d}{ds} P_1 \rightarrow T_1 = \alpha' I + \beta' J + \gamma' K = (\alpha + \Delta\alpha)I + (\beta + \Delta\beta)J + (\gamma + \Delta\gamma)K$$

$$\cos \Delta\theta = T/T_1 = \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma'$$

$$\therefore \cos^2 \Delta\theta = 1 - (\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma')^2$$

$$\text{Mas: } \begin{cases} \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1 \\ \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 = 1 \end{cases}$$

$$\cos^2 \Delta\theta = (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)(\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2) - (\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma')^2$$

Pela identidade de Lagrange: $(\sum_i a_i^2)(\sum_i b_i^2) - (\sum_i a_i b_i)^2 = \sum_{i < k} (a_i b_k - a_k b_i)^2$
 quando os 2^{os} membros têm as contribuições distintas dos índices $i \neq k$.

$$\begin{aligned} \cos^2 \Delta\theta &= (\alpha\beta' - \alpha'\beta)^2 + (\beta\gamma' - \gamma\beta')^2 + (\gamma\alpha' - \alpha\gamma')^2 \\ &= (\alpha \cdot \Delta\beta - \beta \cdot \Delta\alpha)^2 + (\beta \cdot \Delta\gamma - \gamma \cdot \Delta\beta)^2 + (\gamma \cdot \Delta\alpha - \alpha \cdot \Delta\gamma)^2 \end{aligned}$$

É:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta S} &= \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\cos \Delta\theta} \cdot \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\cos \Delta\theta}{\Delta S} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\cos \Delta\theta} \cdot \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\cos \Delta\theta}{\Delta S} \\ &= \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \Delta\theta}{\Delta S} = \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \sqrt{\frac{(\alpha \cdot \Delta\beta - \beta \cdot \Delta\alpha)^2 + (\beta \cdot \Delta\gamma - \gamma \cdot \Delta\beta)^2 + (\gamma \cdot \Delta\alpha - \alpha \cdot \Delta\gamma)^2}{\Delta S^2}}$$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \sqrt{\left(\frac{\Delta\beta}{\Delta S} \alpha - \beta \frac{\Delta\alpha}{\Delta S}\right)^2 + \left(\frac{\Delta\gamma}{\Delta S} \beta - \gamma \frac{\Delta\beta}{\Delta S}\right)^2 + \left(\frac{\Delta\alpha}{\Delta S} \gamma - \alpha \frac{\Delta\gamma}{\Delta S}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\left(\alpha \frac{d\beta}{ds} - \beta \frac{d\alpha}{ds}\right)^2 + \left(\beta \frac{d\gamma}{ds} - \gamma \frac{d\beta}{ds}\right)^2 + \left(\gamma \frac{d\alpha}{ds} - \alpha \frac{d\gamma}{ds}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \left[\left(\frac{dx}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dy}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dz}{ds} \right)^2 \right] - \left[\frac{dx}{ds} \alpha + \frac{dy}{ds} \beta + \frac{dz}{ds} \gamma \right]^2}$$

$$\downarrow \quad \frac{dx}{ds} \alpha + \beta \frac{dy}{ds} + \gamma \frac{dz}{ds} = 0$$

$$= \sqrt{\left(\frac{dx}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dy}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dz}{ds} \right)^2} = \frac{1}{e}$$

B) Vamos chegar a esta mesma expressão pelo cálculo vetorial:

$$\frac{1}{e} = \text{mod} \frac{dT}{ds}$$

$$T = \alpha I + \beta J + \gamma K$$

$$\frac{dT}{ds} = \frac{d\alpha}{ds} I + \frac{d\beta}{ds} J + \frac{d\gamma}{ds} K$$

$$\frac{1}{e} = \text{mod} \frac{dT}{ds} = \sqrt{\left(\frac{d\alpha}{ds} \right)^2 + \left(\frac{d\beta}{ds} \right)^2 + \left(\frac{d\gamma}{ds} \right)^2} \quad \text{c.q.d.}$$

Vamos expressar esta expressão em função de $\underline{r}$ e $\underline{v}$ de S :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = \frac{x'}{s'} \\ \beta = \frac{y'}{s'} \\ \gamma = \frac{z'}{s'} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\alpha}{ds} = \frac{u''s' - u's''}{s'^2} \\ \frac{d\beta}{ds} = \frac{y''s' - y's''}{s'^2} \\ \frac{d\gamma}{ds} = \frac{z''s' - z's''}{s'^2} \end{array} \right.$$

$$\frac{1}{e} = \frac{[(u''s' - u's'')^2 + (y''s' - y's'')^2 + (z''s' - z's'')^2]^{\frac{1}{2}}}{s'}$$

8) Centro de curvatura:

$$C = P + PN$$

$$N = \rho \frac{dT}{ds} \quad \frac{dT}{ds} = \frac{dp}{ds} = \frac{dv}{ds} I +$$

$$\begin{cases} x_1 = x + \rho^2 \frac{dx_0}{ds^2} \\ y_1 = y + \rho^2 \frac{dy_0}{ds^2} \\ z_1 = z + \rho^2 \frac{dz_0}{ds^2} \end{cases}$$

$$\frac{dT}{ds} = \frac{dv}{ds} I +$$

9) Tangente quando a curva é dada por equações paramétricas ou por equações implícitas:

$$A) \begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ f_1(x, y, z) = 0 \end{cases}$$



Derivando em ordem a t tem:

$$\frac{\partial f}{\partial x} x' + \frac{\partial f}{\partial y} y' + \frac{\partial f}{\partial z} z' = 0$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} x' + \frac{\partial f_1}{\partial y} y' + \frac{\partial f_1}{\partial z} z' = 0$$

$$\frac{x-x_0}{x'} = \frac{y-y_0}{y'} = \frac{z-z_0}{z'} = \frac{1}{k}$$

$$x' = k(x-x_0); \quad y' = k(y-y_0); \quad z' = k(z-z_0)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} (x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y} (y-y_0) + \frac{\partial f}{\partial z} (z-z_0) = 0 \\ \frac{\partial f_1}{\partial x} (x-x_0) + \frac{\partial f_1}{\partial y} (y-y_0) + \frac{\partial f_1}{\partial z} (z-z_0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} (x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y} (y-y_0) + \frac{\partial f}{\partial z} (z-z_0) = 0 \\ \frac{\partial f_1}{\partial x} (x-x_0) + \frac{\partial f_1}{\partial y} (y-y_0) + \frac{\partial f_1}{\partial z} (z-z_0) = 0 \end{cases}$$

Ex. do plano linear:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \end{vmatrix} = 0$$

$$B) \begin{cases} y = y(u) \\ z = z(u) \end{cases} \quad u^* = u \quad u' = 1 \quad y' = \frac{dy}{du} \quad z' = \frac{dz}{du}$$

eq. tg:

$$X - u = \frac{y - y}{\frac{dy}{du}} = \frac{z - z}{\frac{dz}{du}}$$

ou:

$$\begin{cases} y - y = \frac{dy}{du} (X - u) \\ z - z = \frac{dz}{du} (X - u) \end{cases}$$

Ex. plano tangente:

$$(X - u) + (Y - y) \frac{dy}{du} + (Z - z) \frac{dz}{du} = 0$$

Curvas planas:

Plano osculador:

A) Se a curva plana, o plano da curva, em todos os seus pontos, o plano osculador.

Deus: $A(X - u) + B(Y - y) + C(Z - z) = 0$

$$A = 0 \quad z' = z'' = 0$$

$$C = u' y'' - y' u''$$

$$C(Z - z) = 0 \quad C \neq 0$$

$$Z = z$$

$$z = 0 \quad \text{c.g.p.}$$

Não há torção de Frenet mas um ângulo recto TPN.

E: $\frac{1}{\rho} = \pm \text{const} \quad \frac{dB}{ds} = 0$ (isto é B é const^{te} $\perp$ OXY).

↓ é a curvatura de torção.

Quando $C = 0$: $\frac{u''}{u'} = \frac{y''}{y}$

integrando os dois lados:

$$\log u' = \log y' + \log C$$

$$u' = Cy$$

integrando novamente tem $u = Cy + d \rightarrow$ a curva está no plano osculador e é um círculo.



2) Comprimento de arco:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{x'^2 + y'^2} dt$$

$$s = \int_{t_0}^t \sqrt{x'^2 + y'^2} dt$$

Quando: $y = f(x) \rightarrow x' = 1$
 $y' = \frac{dy}{dx}$

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

$$s = \int_{x_0}^x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$



3) Tangente:

$$P = 0 + xI + yJ$$

$$T = \frac{dP}{ds} = \frac{dx}{ds} I + \frac{dy}{ds} J$$

a) $x = x(t)$
 $y = y(t) \rightarrow \frac{dx}{ds} = \frac{x'}{y'}$

b) $y = f(x) \rightarrow Y - y = f'(x) (X - x)$

c) $F(x, y) = 0 \rightarrow \frac{\partial F}{\partial x} (X - x) + \frac{\partial F}{\partial y} (Y - y) = 0$

4) Normal:

a) $(X - x)x' + (Y - y)y' = 0$

b) $(X - x) = -\frac{f'(x)}{y'} (Y - y)$

c) $\frac{X - x}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{Y - y}{\frac{\partial F}{\partial y}}$

5) Curvatura:

$$\frac{1}{\rho} = \text{mod } \frac{dT}{ds} = \sqrt{\left(\frac{dx}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds^2}\right)^2}$$

$$a) \quad \frac{1}{\rho} = \frac{xy'' - x'y'}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$b) \quad \frac{1}{\rho} = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

As fórmulas de Frenet reduzem-se agora a:

$$\frac{dT}{ds} = \frac{1}{\rho} N$$

b) Centro de curvatura:

$$\begin{cases} x_1 = x + \rho^2 \frac{dx}{ds^2} \\ y_1 = y + \rho^2 \frac{dy}{ds^2} \end{cases}$$

$$a) \quad \frac{dx}{ds} = \frac{x'}{s'}, \quad \frac{d^2x}{ds^2} = \frac{x''s' - x's''}{s'^3}$$

$$\frac{d^2y}{ds^2} = \frac{y''s' - y's''}{s'^3}$$

$$x_1 = x + \frac{s'^2 = x'^2 + y'^2}{(x'y'' - x''y')^{\frac{3}{2}}} (x''s' - x's'')$$

$$y_1 = y + \frac{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{(x'y'' - x''y')^{\frac{3}{2}}} (y''s' - y's'')$$

$$b) \quad s'^2 = 1 + y'^2$$

$$s's'' = y'y''$$

$$\begin{cases} u_1 = u - y' \frac{1+y'^2}{y''} \\ y_1 = y + \frac{1+y'^2}{y''} \end{cases}$$

Outra definição de centro de curvatura:

Dado $P(u, y)$, cons. as normais em P e em $P(u+h, y+k)$ que concorrem num ponto A . A posição limite deste ponto quando P_1 tende para P é o centro de curvatura.

Es. das normais em P e P_1 :

$$\begin{aligned} X-u &= -f'(u)(y-y) \\ X-u-h &= -f'(u+h)(y-y-k) \\ h &= [f'(u+h) - f'(u)](y-y) - k \cdot f'(u+h) \end{aligned}$$

$$\lambda = \frac{f'(u+h) - f'(u)}{h} = (y-y) - \frac{k}{h} f'(u+h)$$

Na limite:

$$\lambda = \frac{f''(u)}{1} (y-y) - \frac{k}{h} f''(u)$$

$$Y-y + \frac{1+[f'(u)]^2}{f''(u)} \quad Y-y + \frac{1+y'^2}{y''}$$

$$X-u = -f'(u) \frac{1+[f'(u)]^2}{f''(u)}$$

$$X = u - y' \frac{1+y'^2}{y''}$$

C. g. p.



Curva polar. Condutações plückerianas. Focos.

a) - Det. as tgs a d curva tiradas por um ponto exterior.

$$F(u, y) = 0$$

$$y - y_0 = \frac{dy}{du} (x - u)$$

$$\frac{\partial F}{\partial u} (x - u) + \frac{\partial F}{\partial y} (y - y_0) = 0$$

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial u} (a - u) + \frac{\partial F}{\partial y} (b - y) = 0 \\ F(u, y) = 0 \end{cases}$$

O u.º de tgs reais ou complexas, coincidentes ou distintas que se produzem tiras a d curva por 1 ponto exterior diz-se classe d curva pto.

Quando $F(u, y) = 0$ o de grau n a curva ef. e de grau $(n-1)$ e representa a curva que passa pelos pontos de tangência obtidos pela consideração das direções tangentes à curva tiradas por $P(a, b)$.

Se a curva tem o nome de curva polar ou curva dual em relação a (x, y) .

Fundação Cuidar o Futuro

b) Det. as condições para que uma recta seja tangente a uma curva em um ponto (u, y) .

$$F(u, y) = 0$$

$$ux + vy + w = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial u} (x - u) + \frac{\partial F}{\partial y} (y - y_0) = 0$$

$$\begin{cases} \frac{\frac{\partial F}{\partial u}}{u} = \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{v} = \frac{-(u \frac{\partial F}{\partial u} + y \frac{\partial F}{\partial y})}{w} \longrightarrow \phi(u, v, w) = 0 \\ F(u, y) = 0 \end{cases}$$

ep. tangencial
 $\phi(u, v) = 0$

$$ux + vy + w = 0 \longrightarrow ux + vy + 1 = 0$$

Cond. homog.

cond. não homog. ou plückerianas

o grau da curva da eq. tangencial é igual à classe da curva.

Faça:

Problema de 2 pontos tangentes à curva de coef. ang. $+i$ e $-i$.

Res: $y = \pm ix + c$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial F}{\partial u} = \frac{\partial F}{\partial v} = -\left(u \frac{\partial F}{\partial x} + v \frac{\partial F}{\partial y}\right) \\ \frac{\pm i}{1} = \frac{1}{c} \end{array} \right. \rightarrow f(c) = 0$$

$F(x,y) = 0$

$$\left. \begin{array}{l} y = ix + c_1 \\ y = -ix + c_2 \end{array} \right\} \text{foco}$$



Fundação Cuidar o Futuro



Fundação Cuidar o Futuro

$$\begin{vmatrix} I & J & K \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a & b & c \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial c}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial z} \right) I$$

Fundação Cuidar o Futuro

Fundação Cuidar o Futuro

Fundação Cuidar o Futuro